

3

تصميم
معلم رياضيات
محمود عوضتصميم
معلم رياضيات
محمود عوض

معلم أول رياضيات

محمود عوض

إعداد وتصميم

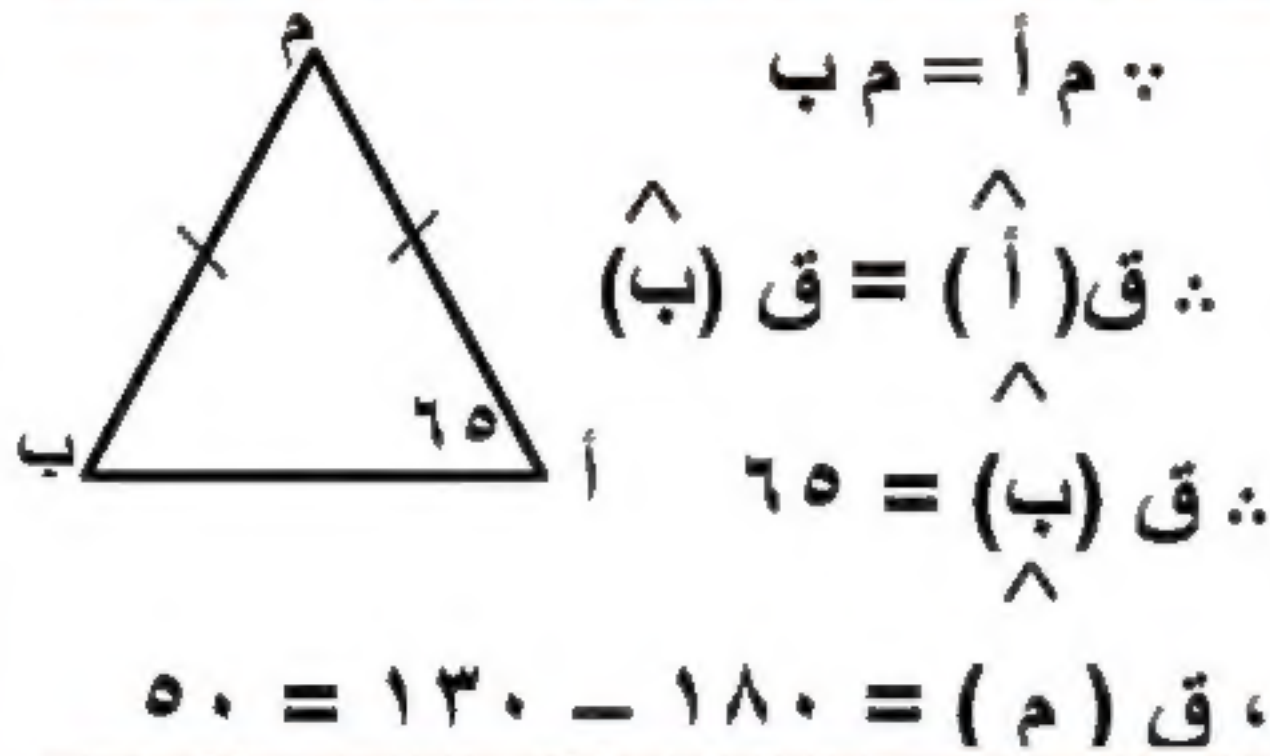


012 025 60 239

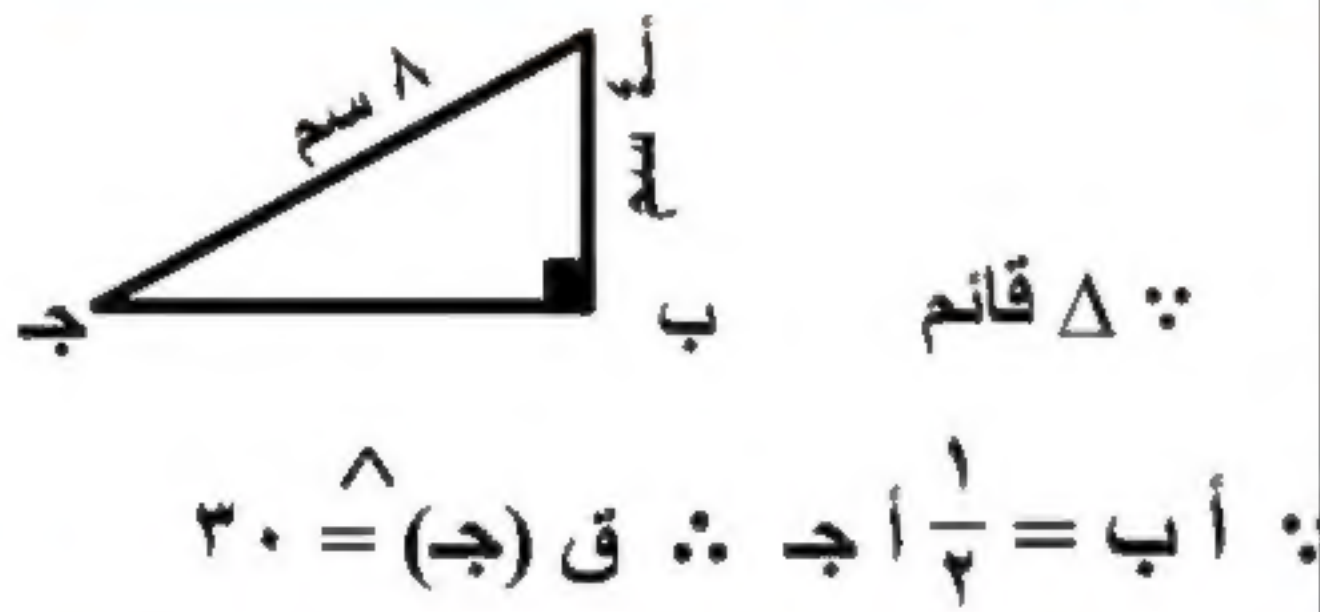


الفهرس

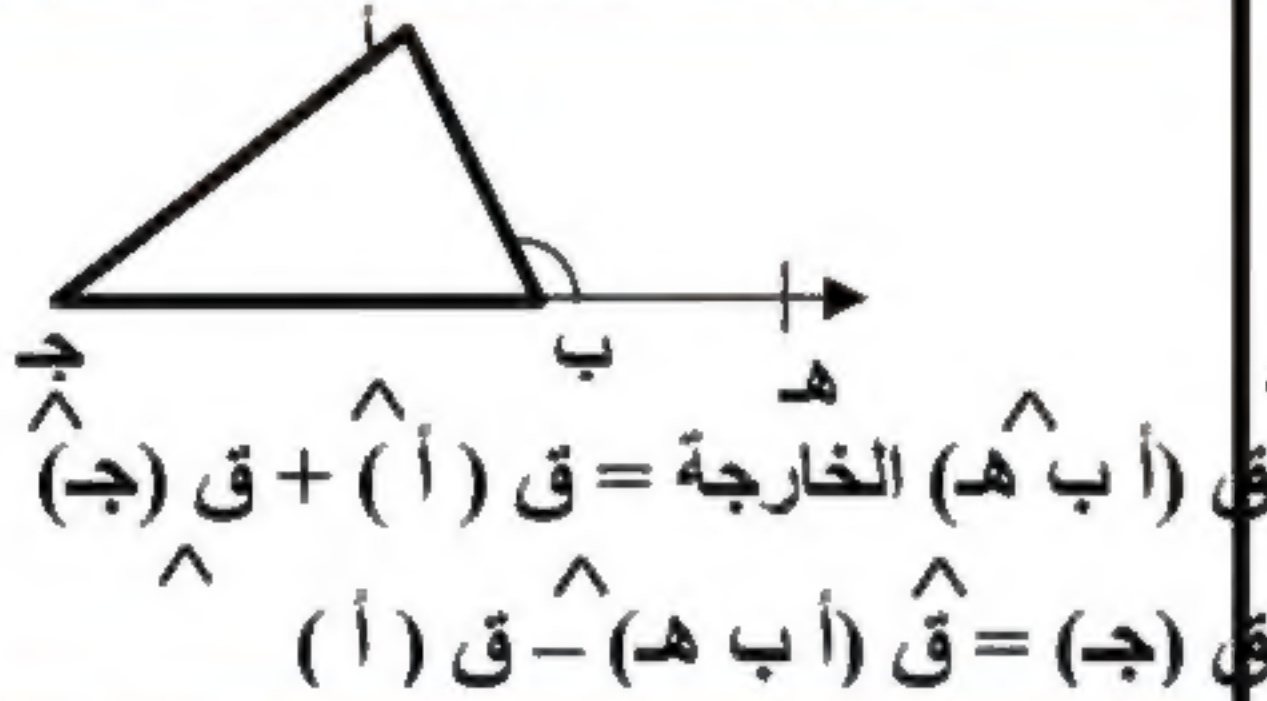
الدرس	رقم	الدرس	الصفحة
الوحدة الرابعة : الدائرة			
١		أساسيات تراكمية	
١	٢	مفاهيم أساسية	
٢	٧	أوضاع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة	
٣	١٠	أوضاع دائرة بالنسبة لدائرة	
٤	١٤	علاقة أوتار الدائرة بمركزها	
٥	١٧	تعيين الدائرة	
الوحدة الخامسة : الزوايا والأقواس			
١	١٩	الزوايا المركزية وقياس الأقواس	
٢	٢٣	العلاقة بين المحيطية والمركزية	
٣	٢٦	تمارين مشهورة	
٤	٢٨	الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس	
٥	٣٢	الشكل الرباعي الدائري	
٦	٣٥	اثبات أن الشكل رباعي دائري	
٧	٤٠	العلاقة بين مماسات الدائرة	
٨	٤٤	الزوايا المماسية	
	٤٨	حل نماذج امتحانات الكتاب المدرسي	
	٥١	ملخص قوانين الهندسة	

في المثلث المتساوي الساقين
زاويتا القاعدة متساويتان

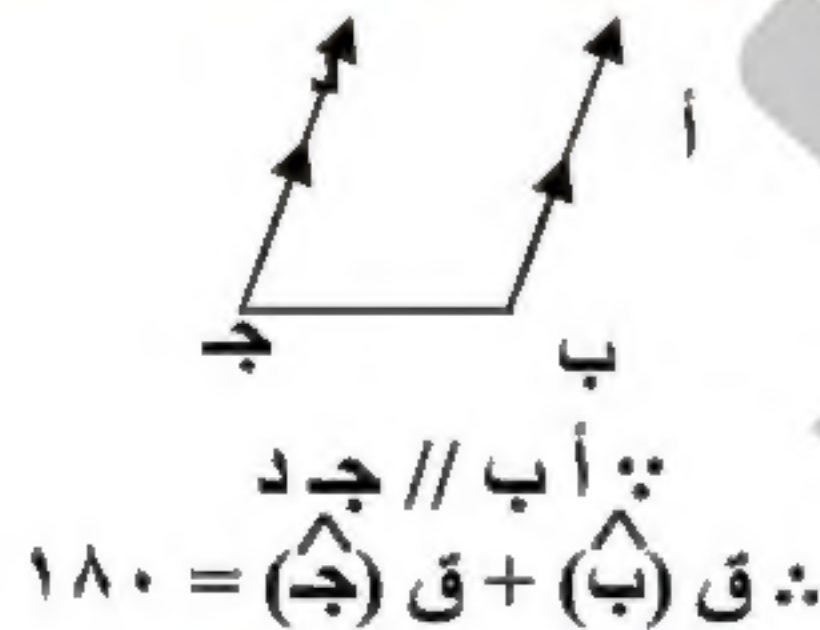
إذا كان طول الضلع = نصف طول
الوتر فإن الزاوية المقابلة له = ٣٠



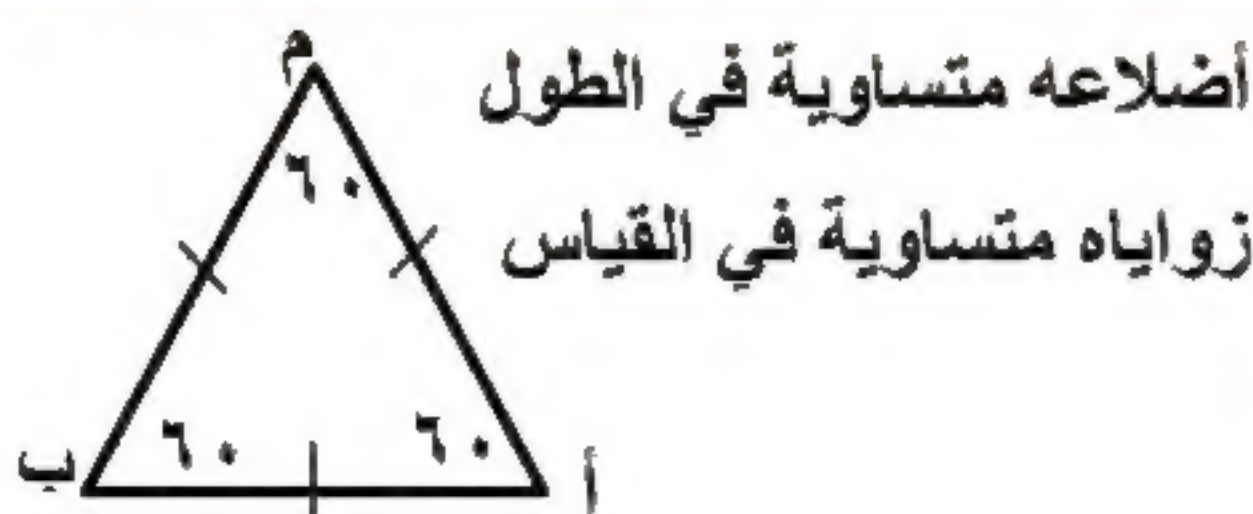
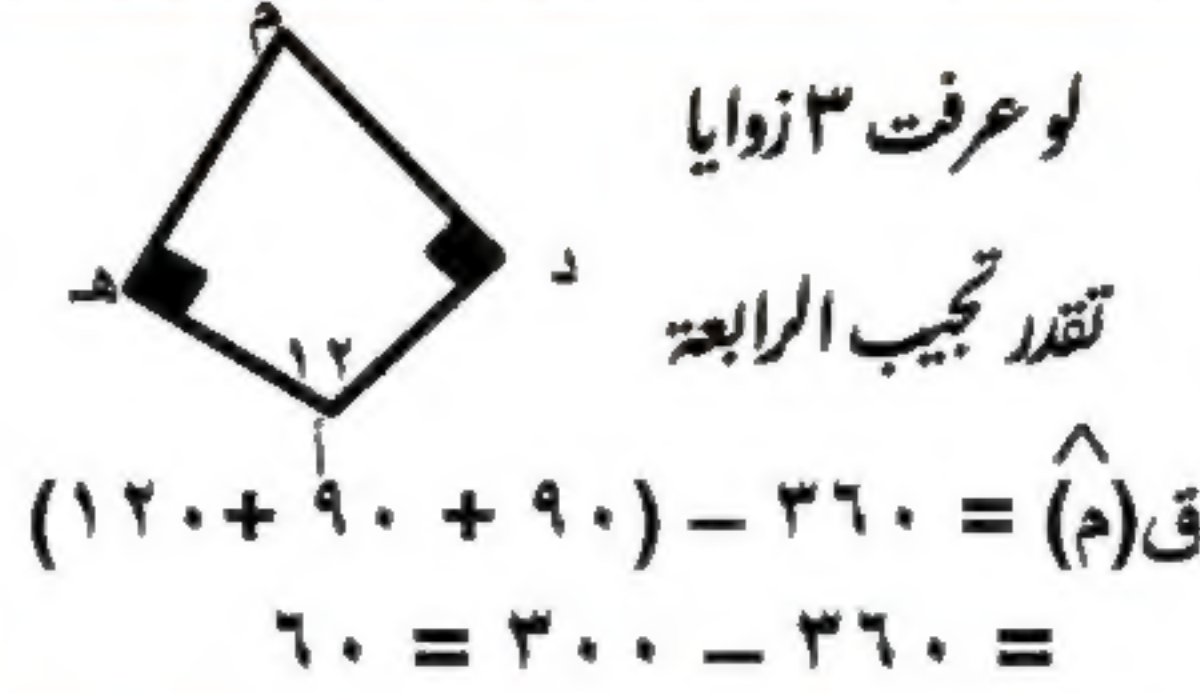
قياس الزاوية الخارجة عن المثلث =
مجموع الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة



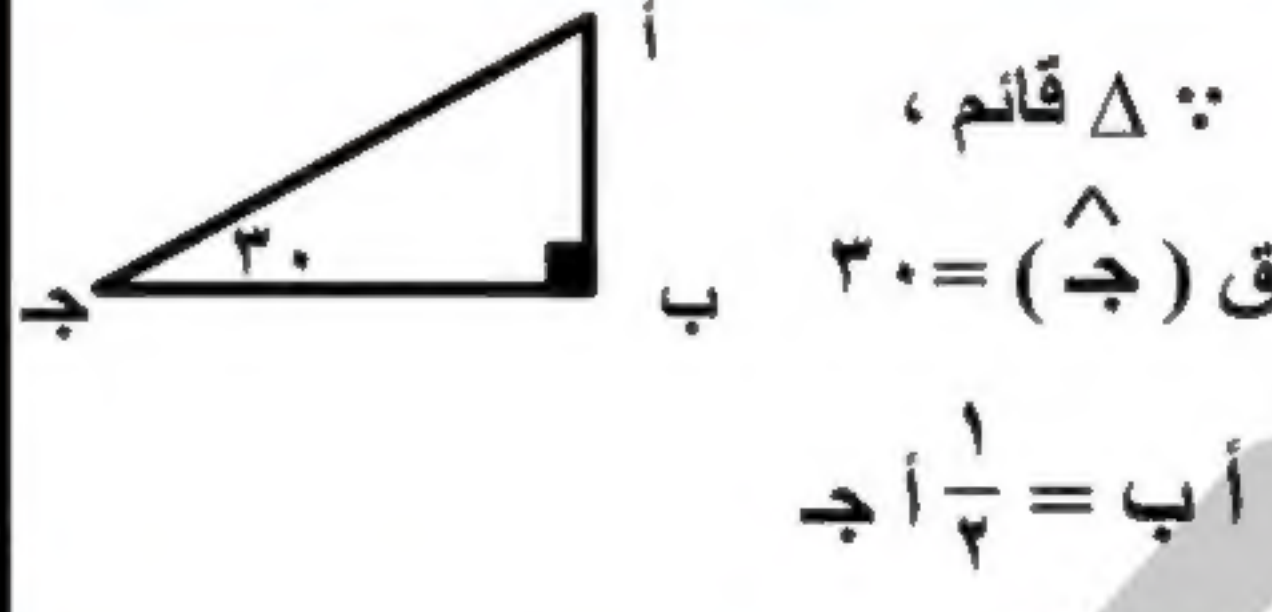
إذا وجد توازي حرف U فإن
الزاويتان المتداخلتان متكاملتان



المثلث المتساوي الأضلاع

مجموع قياسات زوايا
الشكل الرباعي = ٣٦٠

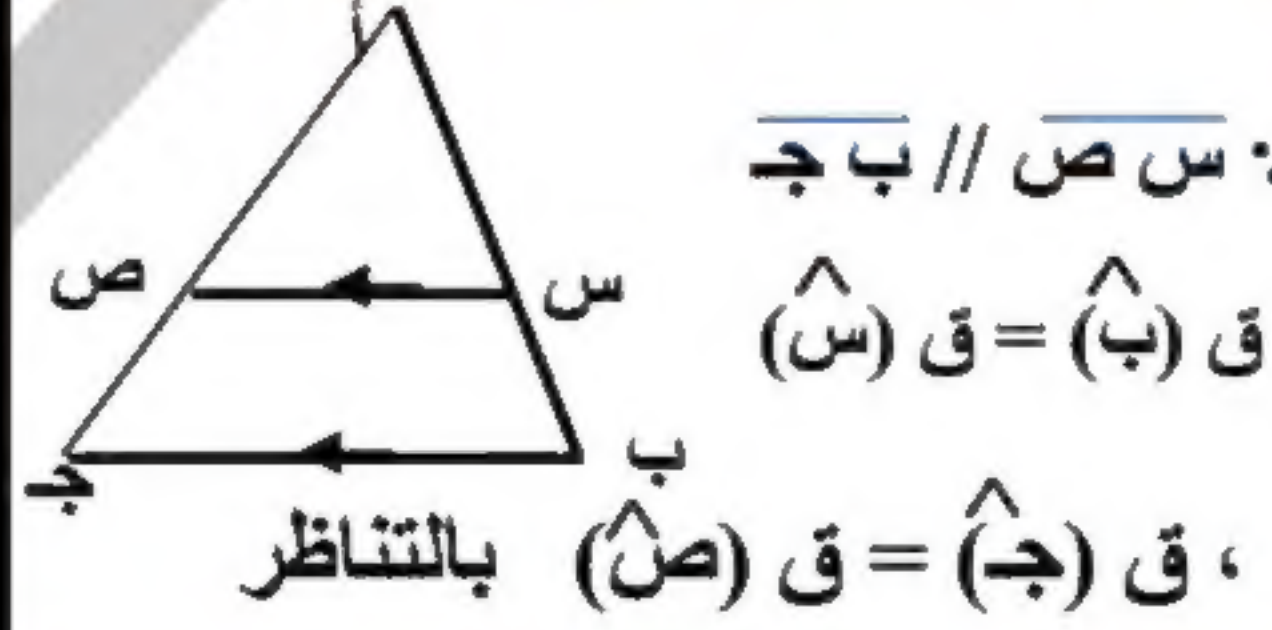
طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠
= نصف طول الوتر



نظرية إقليدس

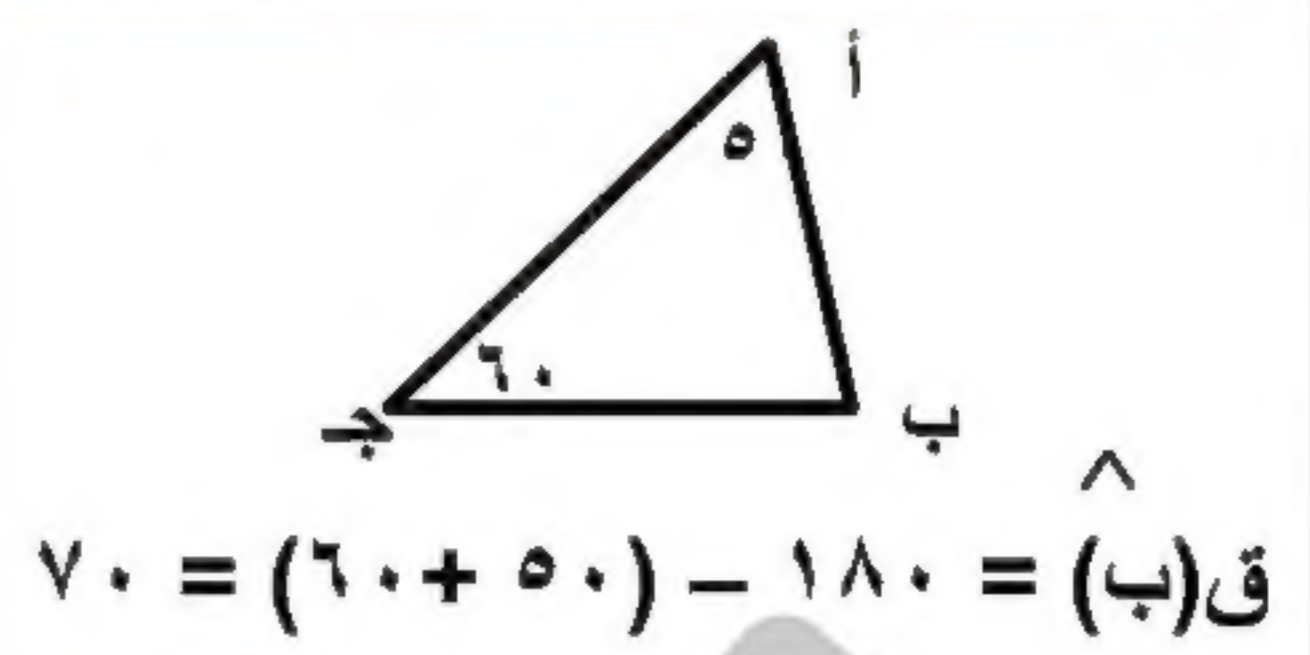


إذا وجد توازي حرف F فإن
الزاويتان المتناظرتان متساويتان

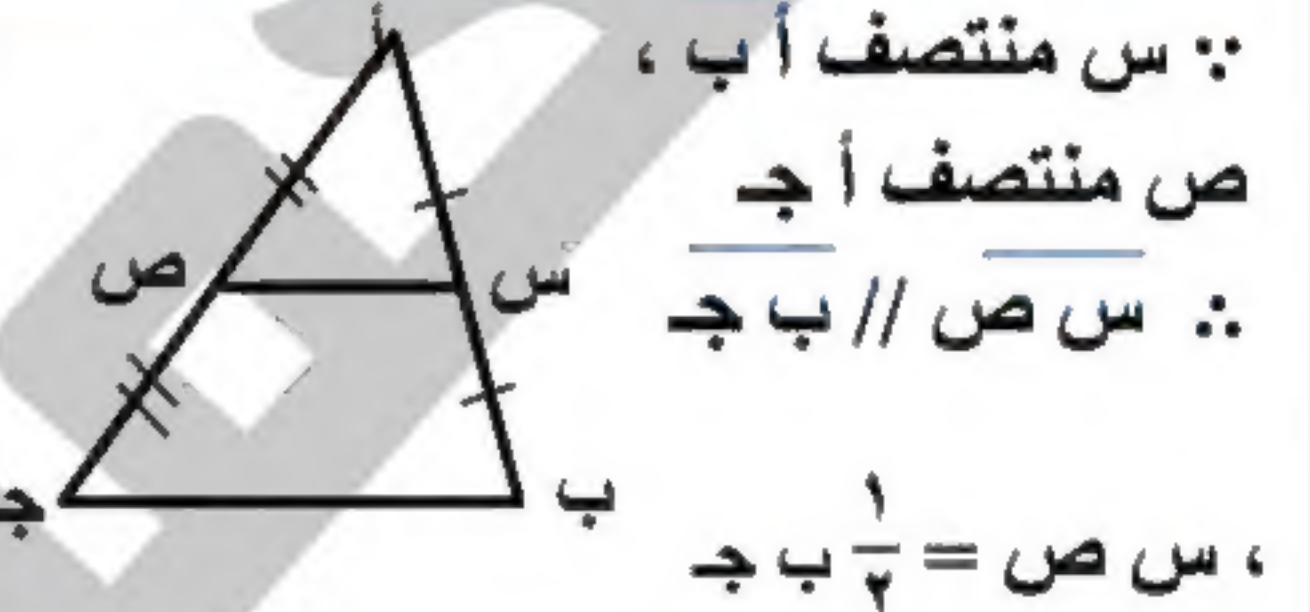


حالات تطابق مثلثين

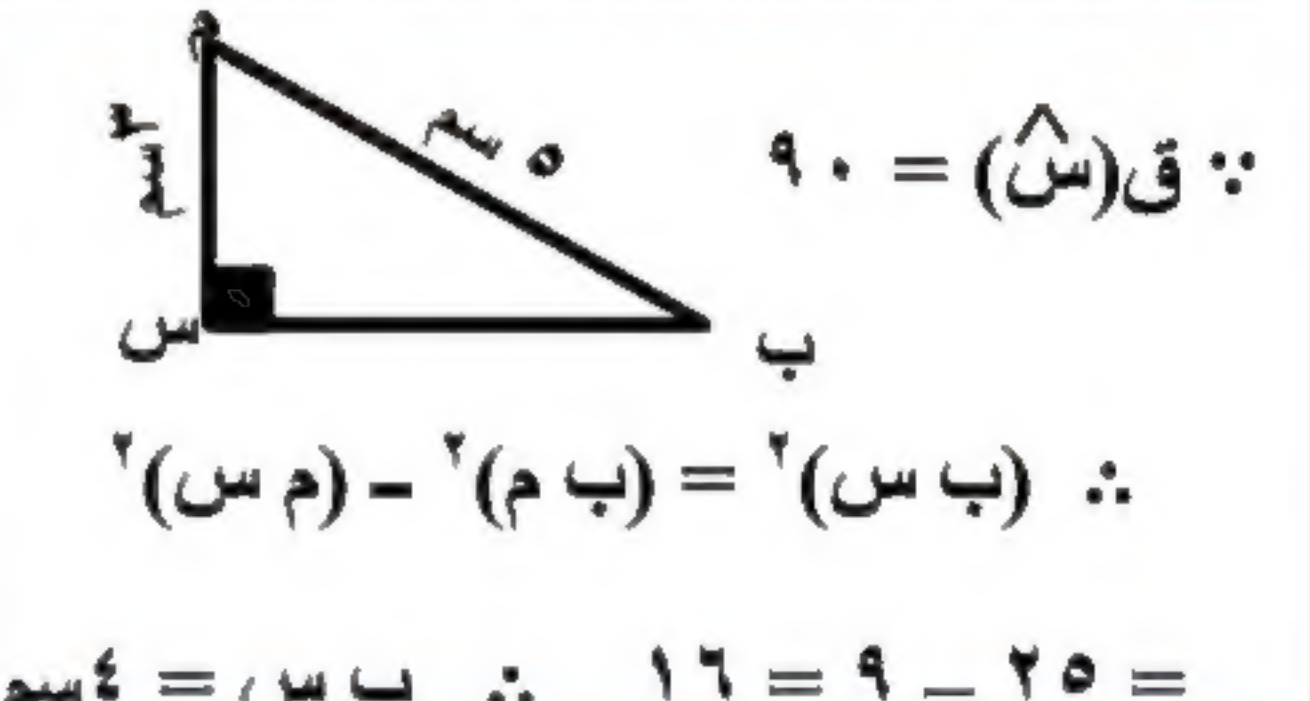
- ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
- زاويتان والضلع المرسوم بينهما
- وتر وضلع (في المثلث القائم)

مجموع قياسات زوايا $\Delta = 180$ 

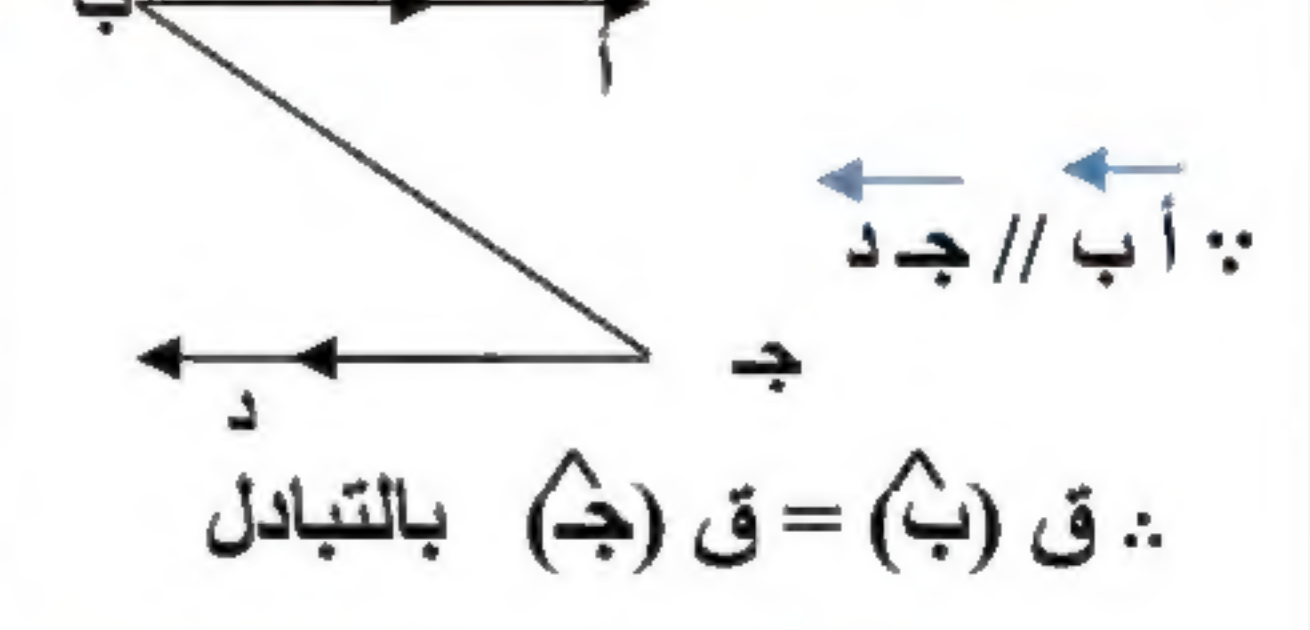
القطعة الواصلة بين منتصفى
ضلعين توازي الضلع الثالث



نظرية فيثاغورث



إذا وجد توازي حرف Z فإن
الزاويتان المتبادلتان متساويتان

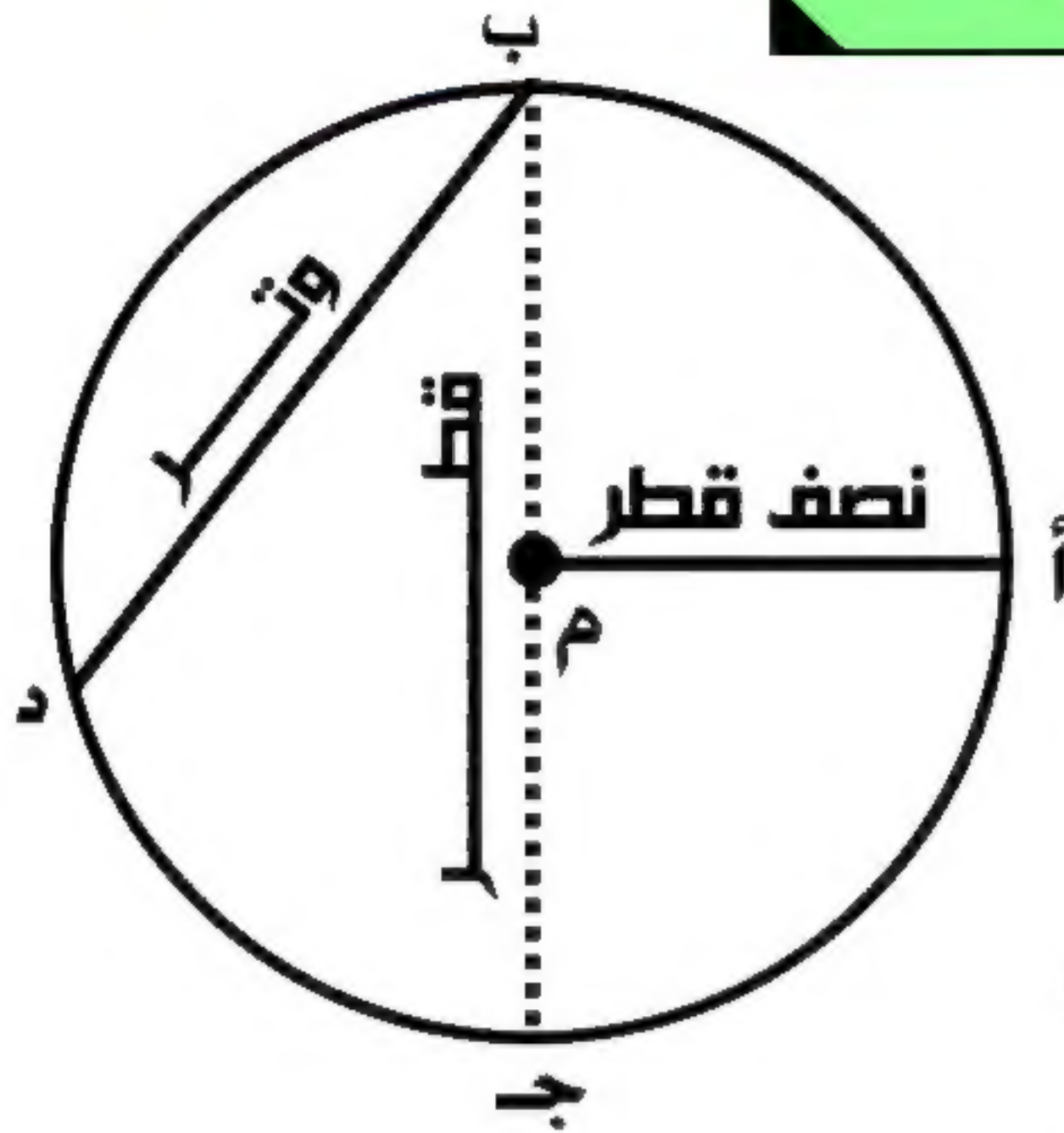


لإثبات التوازي

نبحث عن إحدى الحالات الآتية:

- زاويتان متبادلتان متساويتان
- زاويتان متناظرتان متساويتان
- زاويتان متداخلتان متكاملتان

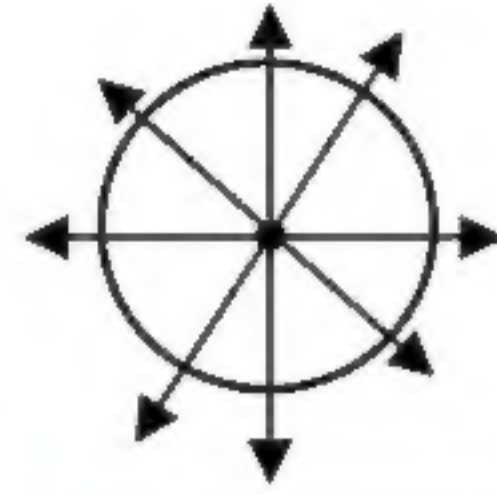
مفاهيم أساسية

الدرس
الأول
1

نصف القطر : هو قطعة مستقيمة طرفها مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة

الوتر : هو قطعة مستقيمة طرفها أي نقطتين على الدائرة

القطر : هو وتر مار بمركز الدائرة ، وهو أطول الأوتار طولاً



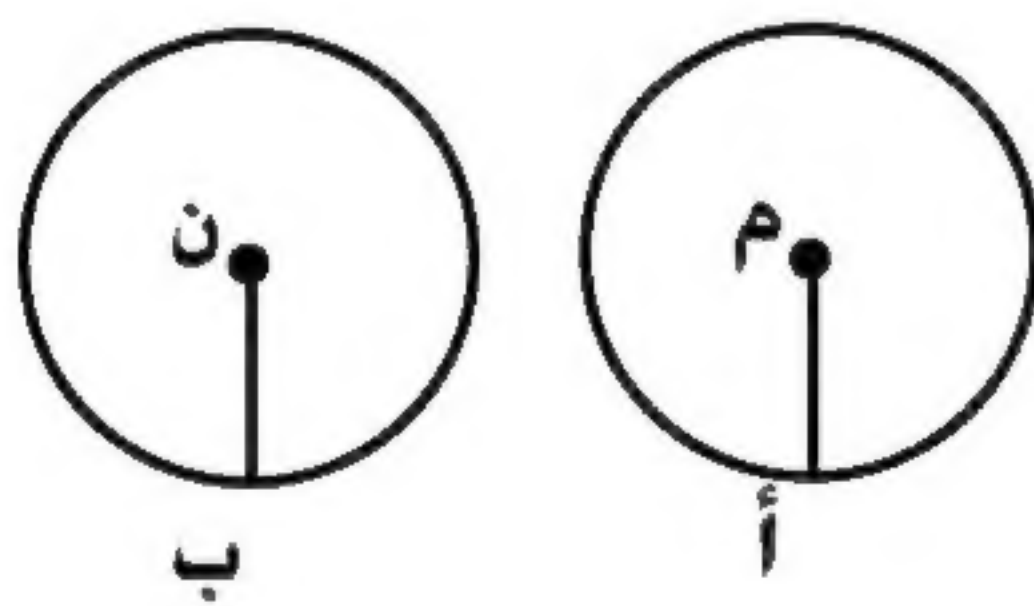
محور التماثل : هو المستقيم المار بمركز الدائرة.

الدائرة لها عدد لا نهائي من محاور التماثل

عدد محاور تماثل نصف أو ربع أو ثلث الدائرة محور واحد

الفرق بين الدائرة و سطح الدائرة

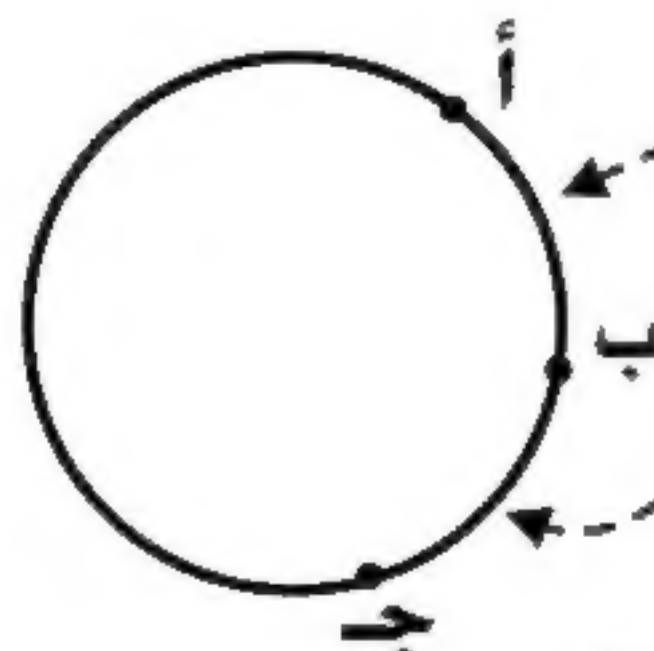
الدائرة	سطح الدائرة	ملحوظة مهمة
الخط الأسود المرسوم ده هو الدائرة	هو الخط الأسود + الجزء المظلل	 $\{A, B\} = M \cap \text{الدائرة}$ بينما $\overline{AB} \cap \text{سطح الدائرة} = \overline{AB}$



الدائرتان المتطابقتان : هما دائرتان أنصاف أقطارهما متساوية في الطول.

إذا كانت م ، ن دائرتان متطابقتان فإن $M = N$

القوس : هو جزء من خط الدائرة



من أ إلى ب يسمى قوس ويكتب : \widehat{AB}

من ب إلى ج يسمى قوس ويكتب : \widehat{BC}

من أ إلى ج يسمى قوس ويكتب : \widehat{AC} أو \widehat{AB}

ملاحظات : مساحة الدائرة = $\pi \text{ نق}^2$

محيط الدائرة = $2\pi \text{ نق}$

طول نصف الدائرة = $\pi \text{ نق}$

طول ربع الدائرة = $\frac{1}{4}\pi \text{ نق}$



نتائج هامة



١

أنصاف الأقطار فى الدائرة
الواحدة متساوية فى الطول



∴ م أ ، م ب أنصاف أقطار
∴ م أ = م ب
أى أن : ق (أ) = ق (ب)

مثال ١



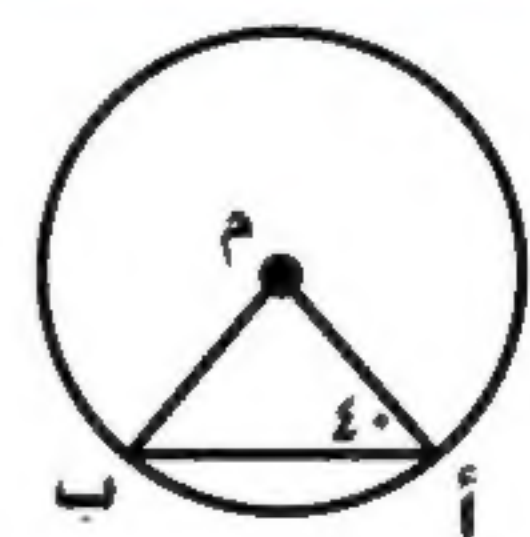
أوجد ق (م أ ب)

الحل : ∴ م أ = م ب أنصاف أقطار

∴ ق (أ) = ق (ب)

$$50 = \frac{180 - 80}{2} =$$

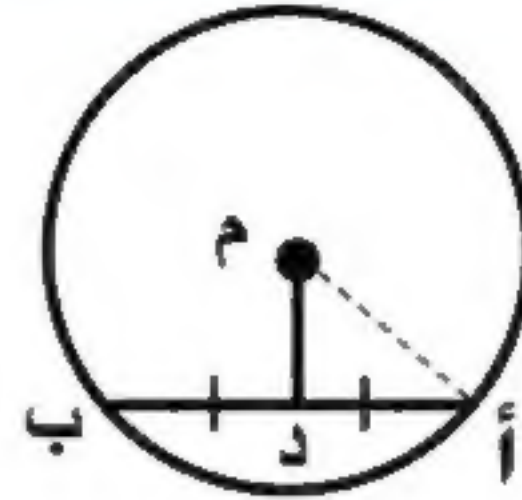
تدريب ١



أوجد ق (أ م ب)

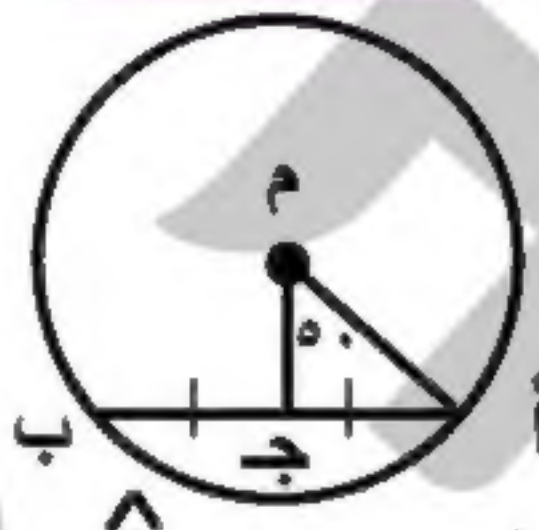
٢

المستقيم المار بمركز الدائرة
وبمنتصف أى وتر فيها
يكون عموديا على هذا الوتر



∴ د منتصف الوتر أ ب
∴ م د ⊥ أ ب
∴ ق (م د أ) = 90

مثال ٢



أوجد ق (م أ ج)

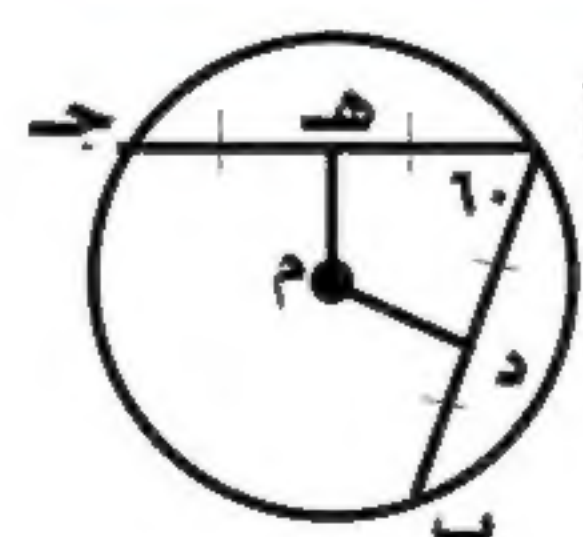
الحل :

∴ ج منتصف أ ب ∴ م ج ⊥ أ ب

∴ ق (م ج أ) = 90

$$40 = 180 - (90 + 90) =$$

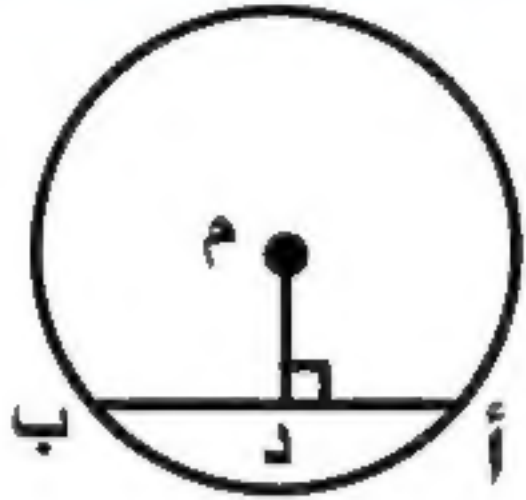
تدريب ٢



أوجد ق (د م هـ)

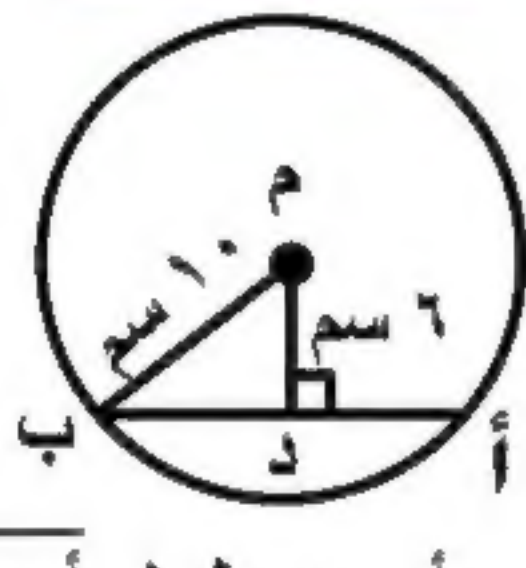
٣

المستقيم المار بمركز الدائرة
وعمودياً على أى وتر فيها
ينصف هذا الوتر



∴ م د ⊥ أ ب
∴ د منتصف أ ب ∴ أ د = د ب
فإذا كان أ ب = ٨ سم فإن أ د = ٤ سم

مثال ٣



أوجد طول أ د

الحل :

فى ∆ م د ب من فيثاغورث

د ب = ٨ سم

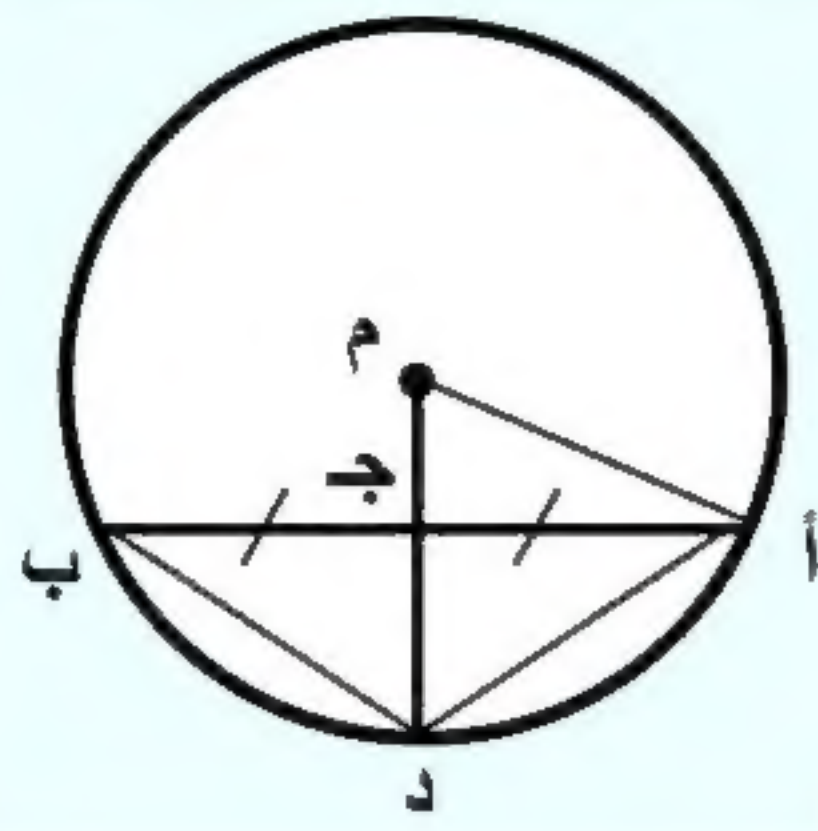
∴ م د ⊥ أ ب ∴ د منتصف أ ب

∴ أ د = د ب = ٨ سم

تدريب ٣



أ ب = ٨ سم أوجد م ب



٢ في الشكل المقابل :

م دائرة طول نصف قطرها ١٣ سم
 أب وتر فيها طوله ٢٤ سم
 ج منتصف أب
 أوجد: مساحة \triangle أدب

الحل

\therefore ج منتصف أب \therefore م ج \perp أب \therefore ق (م ج أ) $= 90^\circ$
 \therefore أب = ٢٤ سم \therefore أج = ١٢ سم

في \triangle م ج أ القائم : بتطبيق فيثاغورث

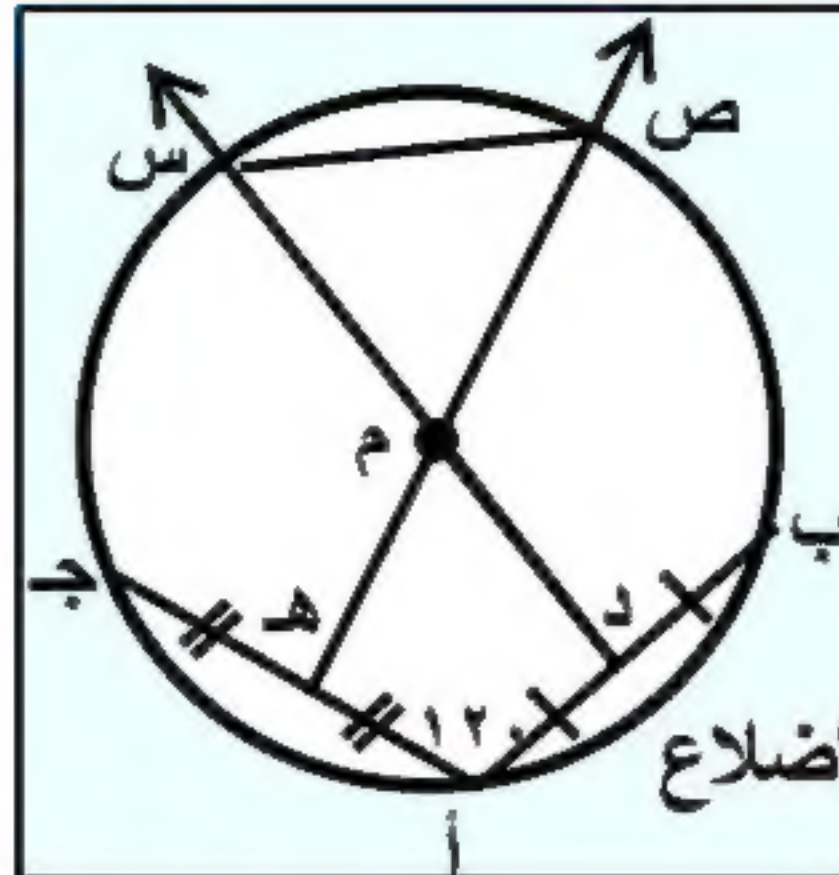
$$\therefore (م ج) = \sqrt{(١٣)^2 - (١٢)^2} = \sqrt{١٦٩ - ١٤٤} = \sqrt{٢٥}$$

$$\therefore م ج = ٥ سم ، \therefore م د = ١٣ سم$$

$$\therefore ج د = ١٣ - ٥ = ٨ سم$$

\therefore مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times$ طول القاعدة \times الارتفاع

$$\therefore \text{مساحة } \triangle \text{ أدب} = \frac{1}{2} \times ٢٤ \times ٨ = ٩٦ \text{ سم}^2$$



١ في الشكل المقابل :

د ، ه منتصفا أب ، أج

على الترتيب

$$ق (\hat{أ}) = 120^\circ$$

اثبت أن \triangle س ص م متساوي الأضلاع

الحل

\therefore د منتصف أب \therefore م د \perp أب

$$\therefore ق (\hat{م د أ}) = 90^\circ$$

\therefore ه منتصف أج \therefore م ه \perp أج

$$\therefore ق (\hat{م ه أ}) = 90^\circ$$

\therefore مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°

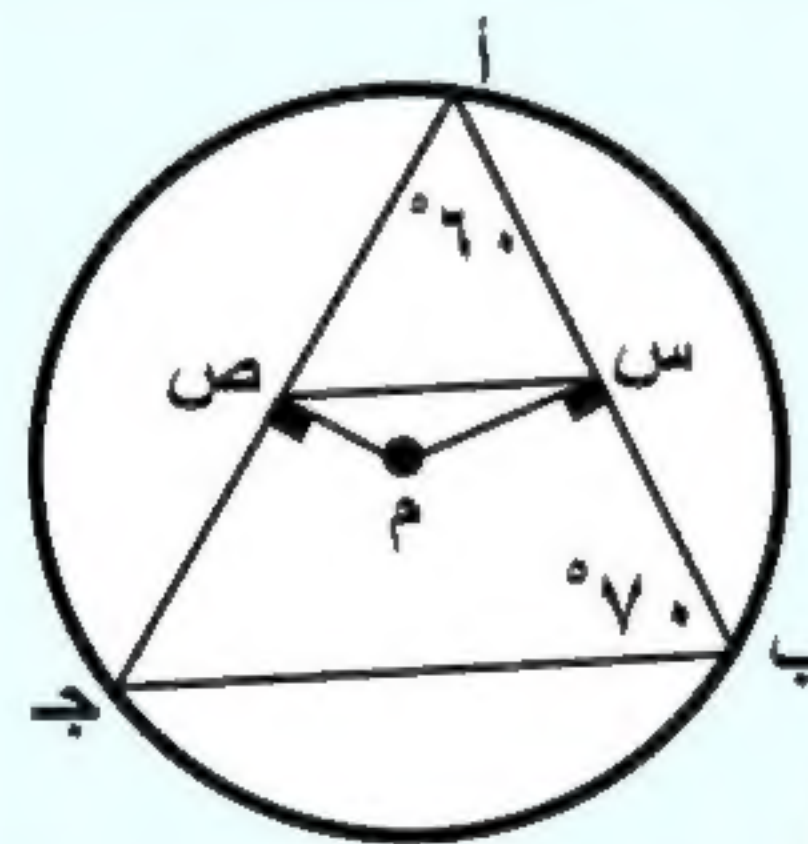
$$\therefore ق (\hat{د م ه}) = (120 + 90 + 90) - 360 = 60^\circ$$

$$\therefore ق (\hat{ص م س}) = 60^\circ \text{ بالتقابل بالرأس}$$

\therefore م ص = م س (أنصاف أقطار)

$$\therefore ق (\hat{م ص س}) = ق (\hat{م س ص}) = 60^\circ$$

$\therefore \triangle$ س ص م متساوي الأضلاع (جميع زواياه 60°)



٤ في الشكل المقابل :

م س \perp أب ، م ص \perp أج

$$ق (\hat{أ}) = 60^\circ$$

$$ق (\hat{ب}) = 70^\circ$$

أوجد قياسات زوايا \triangle م س ص

الحل

$$ق (\hat{ج}) = 180 - (60 + 70) = 50^\circ$$

\therefore م س \perp أب \therefore س منتصف أب

\therefore م ص \perp أج \therefore ص منتصف أج

\therefore س ص \parallel ب ج (قطعة واصله بين منتصفى ضلعين)

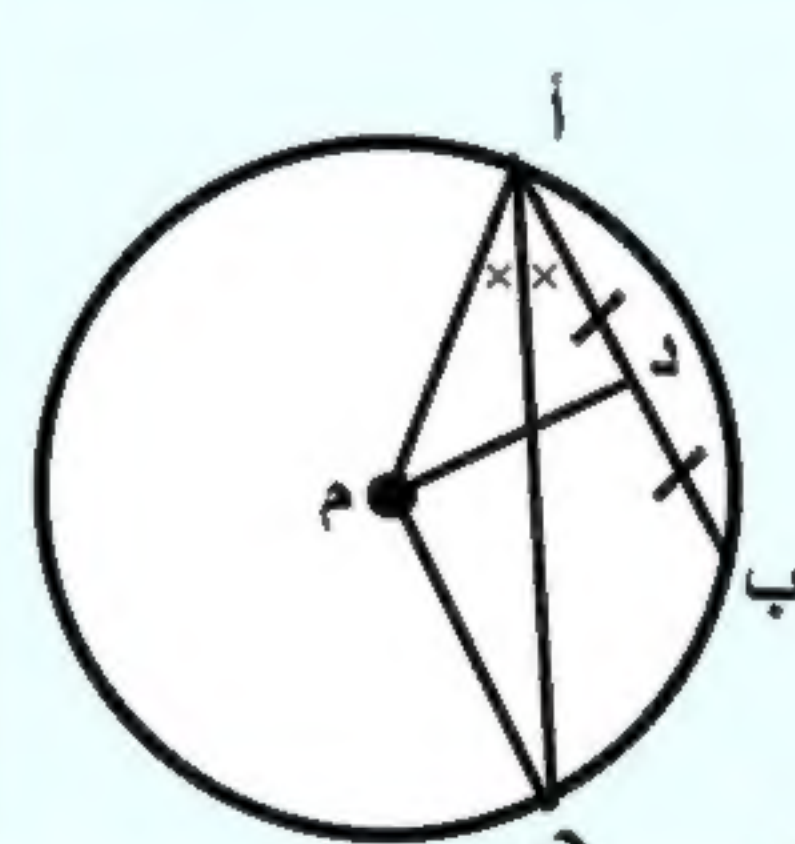
$$\therefore ق (\hat{أ س ص}) = 70^\circ ، ق (\hat{أ ص س}) = 50^\circ \text{ بالتناظر}$$

$$\therefore ق (\hat{م س ص}) = 90 - 70 = 20^\circ$$

$$، ق (\hat{م ص س}) = 90 - 50 = 40^\circ$$

في \triangle س م ص :

$$ق (\hat{س م ص}) = 180 - (40 + 20) = 120^\circ$$



٣ في الشكل المقابل :

أب وتر في الدائرة م

أج ينصف ب أ م

د منتصف أب

اثبت أن د م

الحل

في \triangle أ م ج : \therefore م أ = م ج (أنصاف أقطار)

$$\therefore ق (\hat{م أ ج}) = ق (\hat{م ج أ}) \text{ (١)}$$

$$\therefore ق (\hat{م أ ج}) = ق (\hat{ب أ ج}) \text{ (٢) معطى}$$

من ١ ، ٢ ينتج أن :

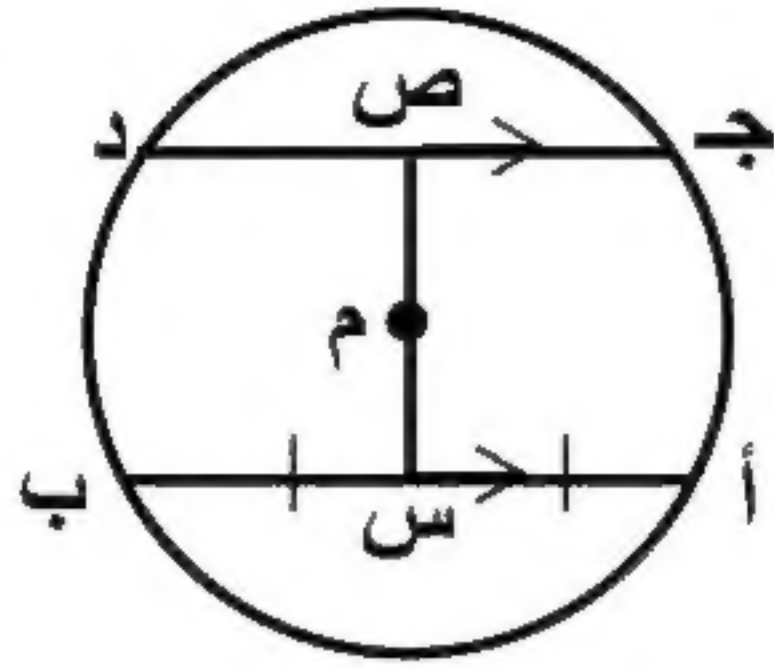
$$ق (\hat{م ج أ}) = ق (\hat{ب أ ج}) \text{ وهما متبادلتان}$$

$$\therefore$$
 أب \parallel ج م

\therefore د منتصف أب \therefore م د \perp أب

$$\therefore$$
 أب \parallel ج م \therefore م د \perp ج م

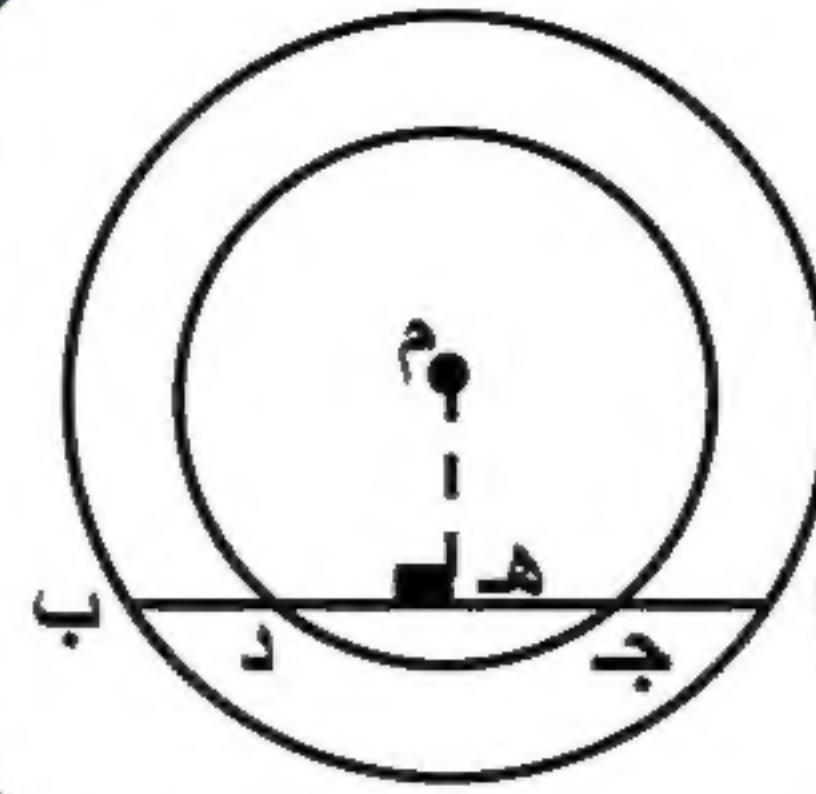
٣



أب // جد
س منتصف أب
اثبت أن :
ص منتصف جد

الحل

١

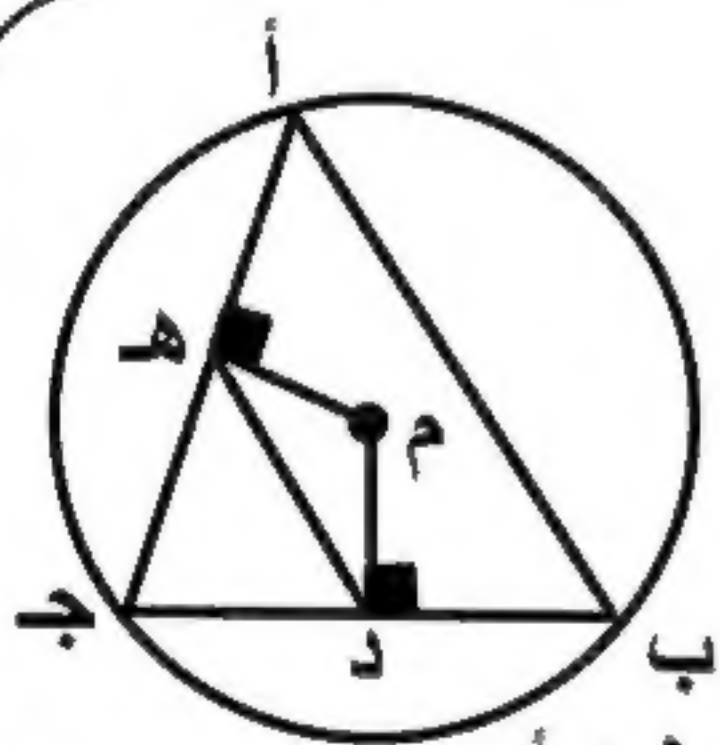


دائرتان متحدتا المركز م
أب وتر في الدائرة الكبرى
يقطع الصغرى في ج ، د
اثبت أن : أ ج = ب د

الحل

العمل : نرسم م ه عمودى على أب

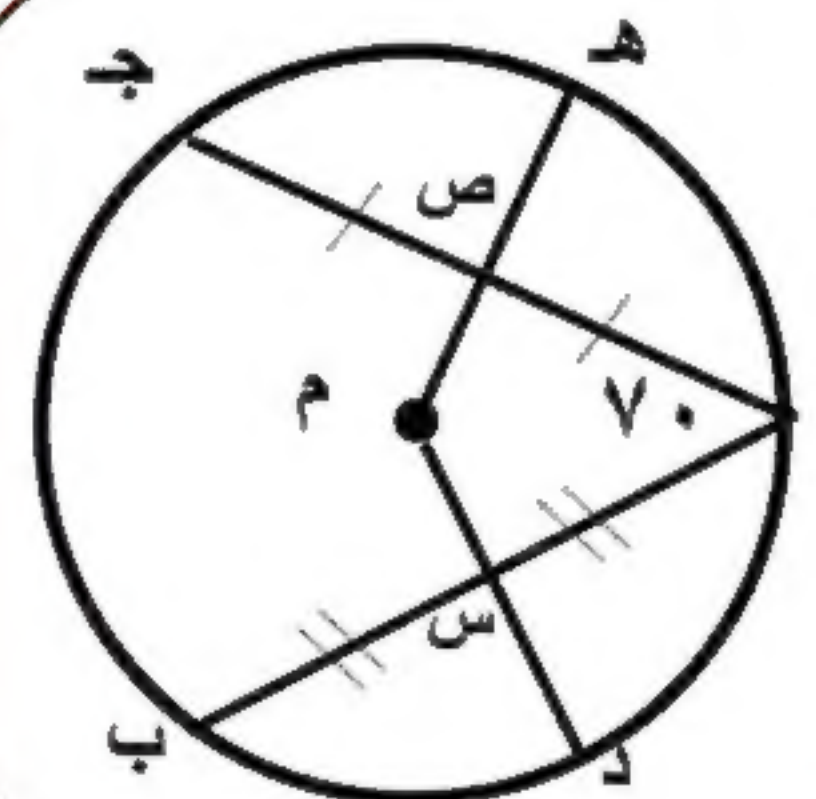
٤



أ ب ج د مرسوم داخل دائرة
م د \perp ب ج ، م ه \perp أ ج
اثبت أن : (١) ه د // أ ب
(٢) محيط Δ ج د ه = $\frac{1}{2}$ محيط Δ أ ب ج

الحل

٢



أ ب ، أ ج وتران
س منتصف أب ،
ص منتصف أ ج
ق (ج أ ب) = 70°
أوجد ق (د م ه)

الحل

تمارين

١ عدد محاور التماثل لأي دائرة هو

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) عدد لا نهائي

٢ عدد محاور تماثل نصف الدائرة هو

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) عدد لا نهائي

٣ محور تماثل الدائرة هو

- (أ) نصف القطر (ب) القطر (ج) الوتر (د) المستقيم المار بالمركز

٤ أكبر أوتار الدائرة طولاً يسمى

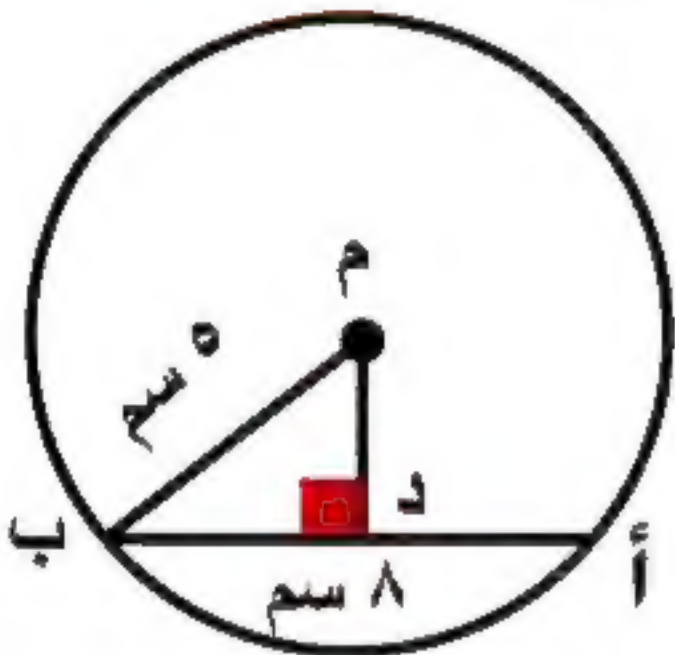
- (أ) وتر (ب) قطر (ج) نصف قطر (د) مماس

٥ دائرة طول أكبر وتر فيها = ١٢ سم فإن محيط الدائرة = سم

- (أ) $\pi ١٢$ (ب) $\pi ٦$ (ج) $\pi ٢٤$ (د) $\pi ١٠$

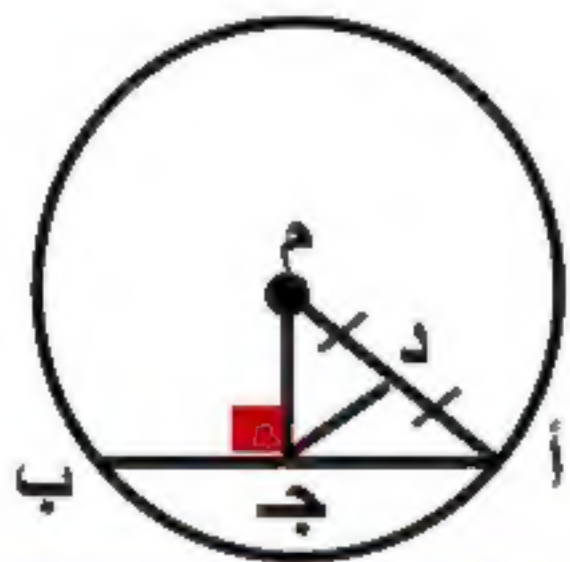
٦ القطر هو يمر بمركز الدائرة

- (أ) وتر (ب) مستقيم (ج) شعاع (د) مماس



٧ في الشكل المقابل: أ ب = ٨ سم ، م ب = ٥ سم فإن م د = سم

- (أ) ٥ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٢

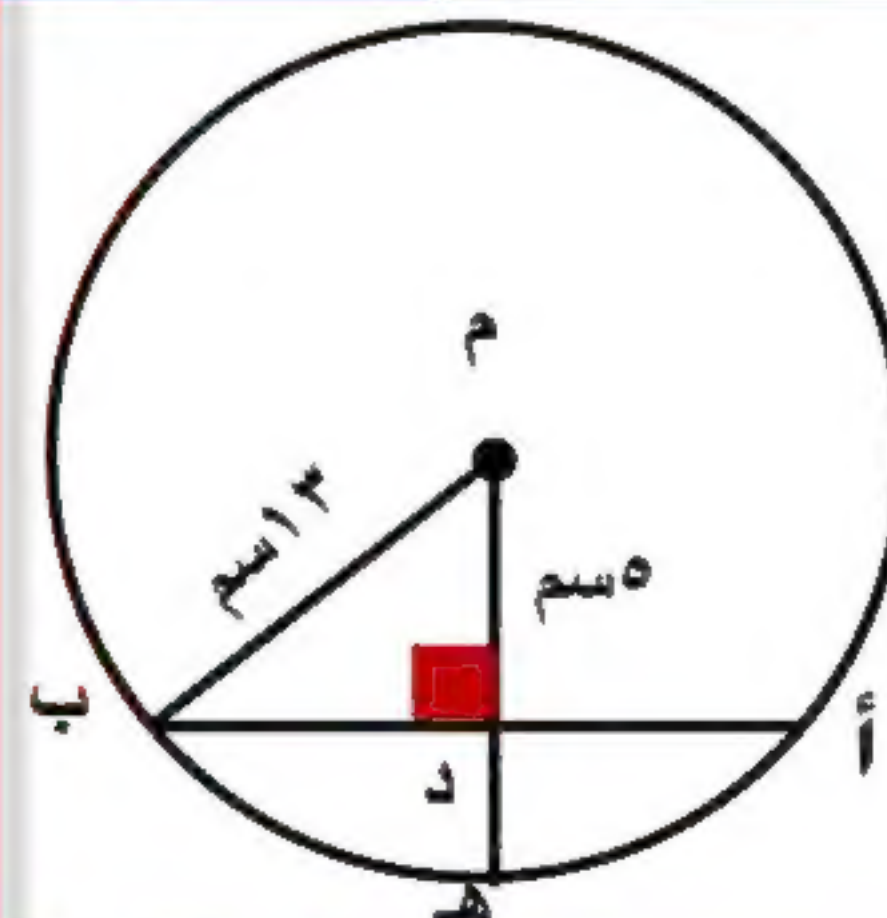


٨ في الشكل المقابل: د منتصف أ ج ، م ج \perp أ ب ، ج د = ٣ سم

- فإن مساحة سطح الدائرة م تساوي π سم^٢
(أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٩ (د) ٣٦

١ في الشكل المقابل:

- أ ب = سم
ه د = سم



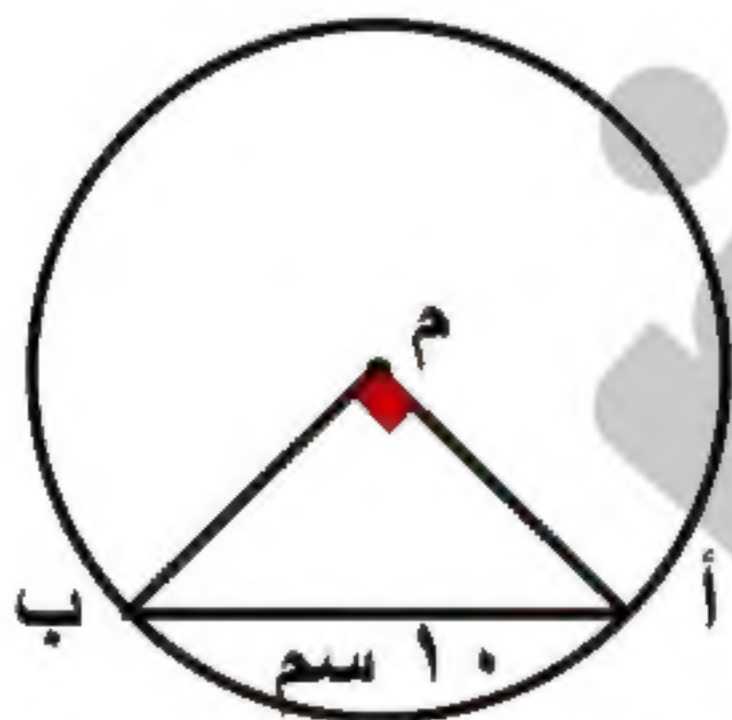
٢ في الشكل المقابل:

ق (أ) = °

م أ = سم

ملحوظة: طول ضلع المثلث القائم

$$\frac{\text{الوتر}}{2} = \sqrt{2}$$



٣ في الشكل المقابل:

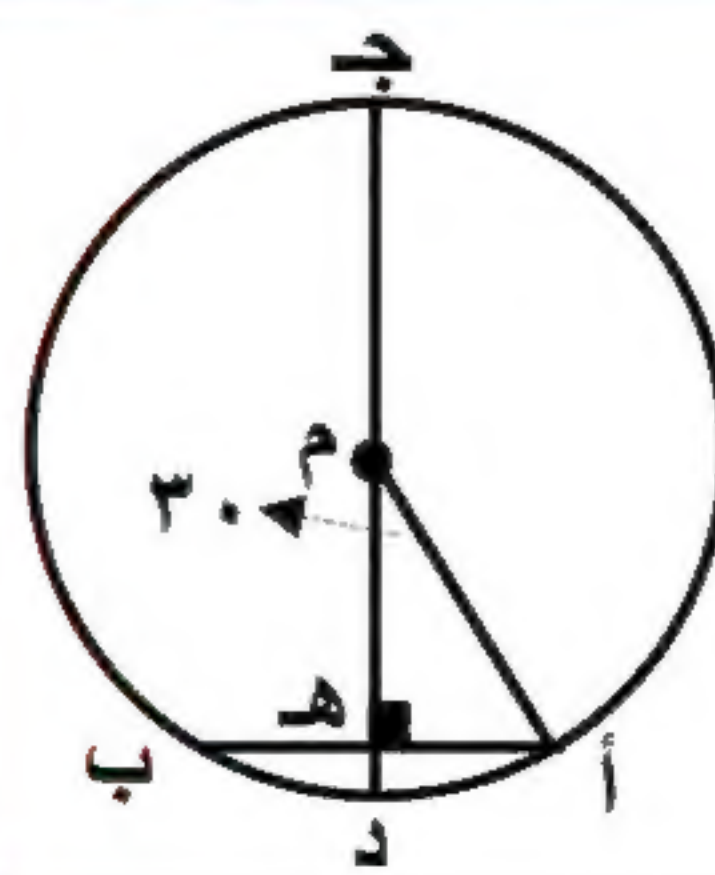
ج د قطر في الدائرة م

م ه \perp أ ب

ق (أ م ه) = ٣٠ °

أ ب = ١٠ سم

أوجد طول ج د ، ه د



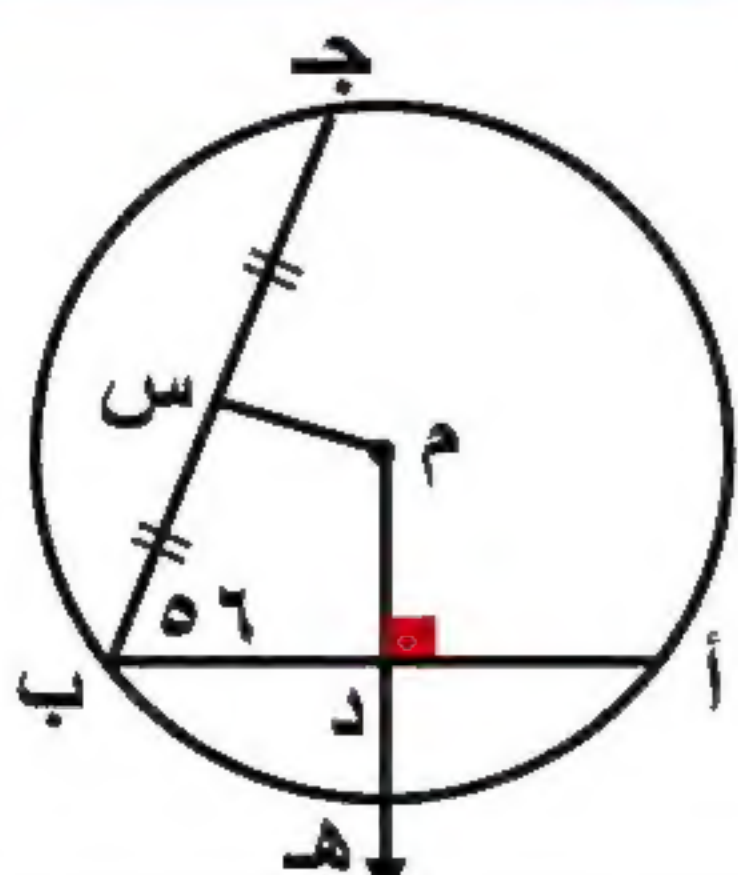
٤ في الشكل المقابل:

م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

س منتصف ب ج ، أ ب = ٨ سم

م د أ ب ، ق (ب) = ٥٦ °

أوجد: ق (د م س) ، طول د ه



أوضاع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة

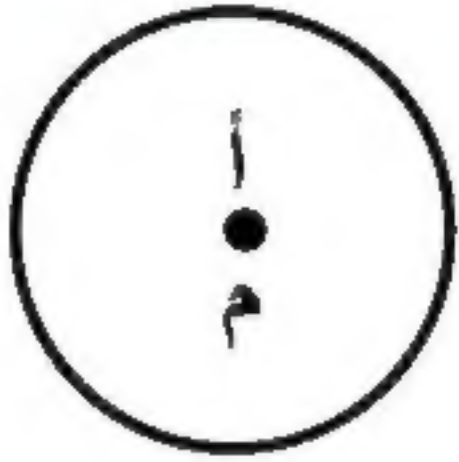
الدرس
الثاني

أولا

أوضاع نقطة بالنسبة لدائرة

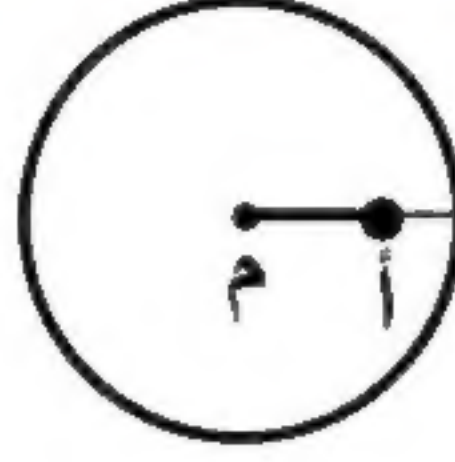
إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة فإن النقطة أ تقع :

على المركز



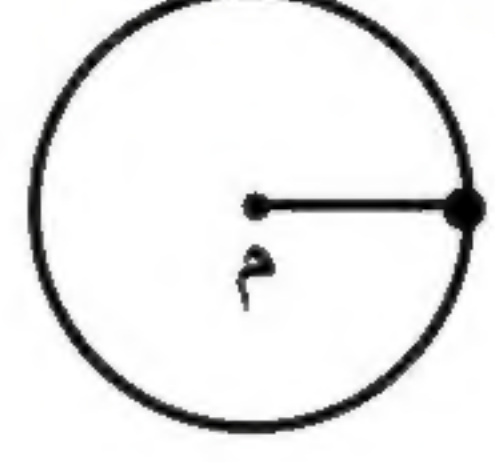
إذا كان : م أ = صفر

داخل الدائرة



إذا كان : م أ > نق

على للدائرة



إذا كان : م أ = نق

خارج الدائرة



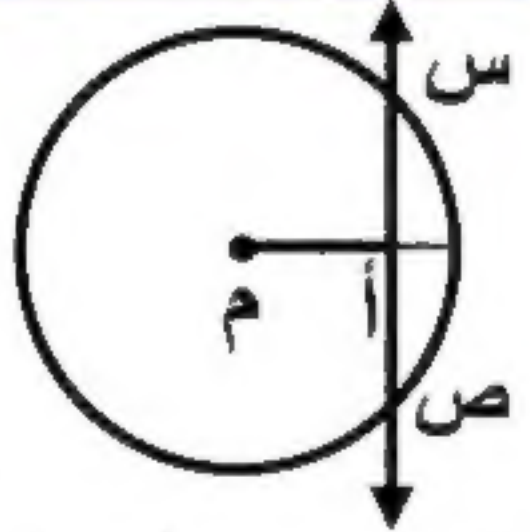
إذا كان : م أ < نق

أوضاع مستقيم بالنسبة لدائرة

ثانيا

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة ∃ المستقيم فإن المستقيم يكون :

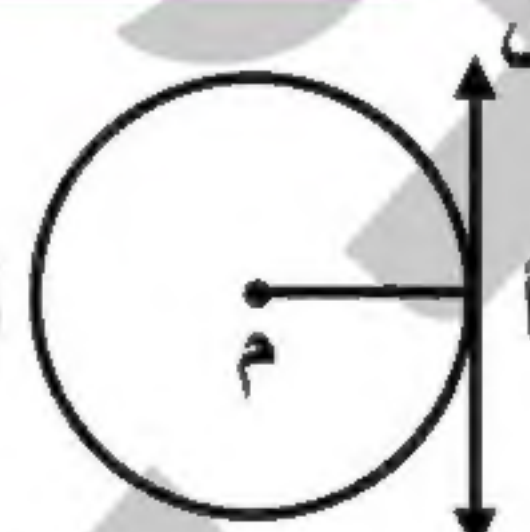
قاطع للدائرة



إذا كان : م أ > نق

$$\begin{aligned} \vec{L} \cap \text{الدائرة م} &= \{ \text{س} , \text{ص} \} \\ \vec{L} \cap \text{سطح م} &= \overline{\text{س ص}} \end{aligned}$$

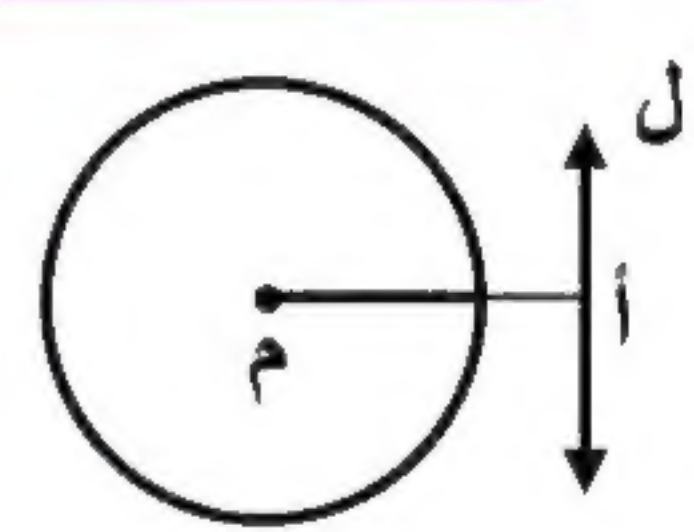
مماس للدائرة



إذا كان : م أ = نق

$$\begin{aligned} \vec{L} \cap \text{الدائرة م} &= \{ \text{أ} \} \\ \vec{L} \cap \text{سطح م} &= \{ \text{أ} \} \end{aligned}$$

خارج الدائرة



إذا كان : م أ < نق

$$\begin{aligned} \vec{L} \cap \text{الدائرة م} &= \emptyset \\ \vec{L} \cap \text{سطح م} &= \emptyset \end{aligned}$$

تدريب

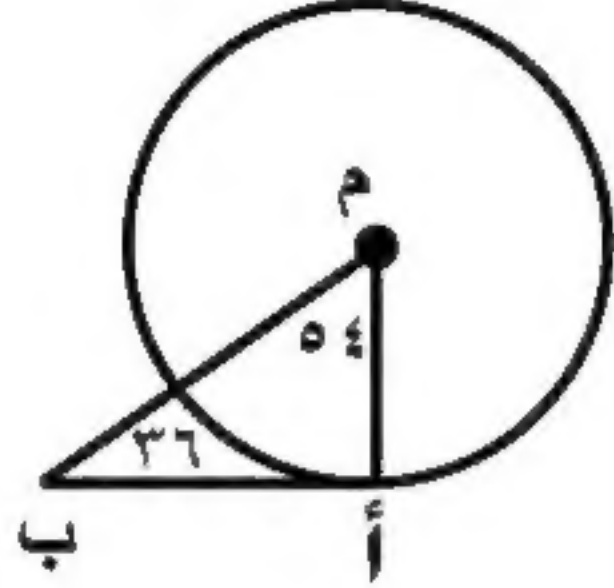
إذا كانت م دائرة طول قطرها ٨ سم ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٤ سم فإن المستقيم ل يكون

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة في المستوى بحيث م أ = ٤ سم فإن أ تقع الدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، والمستقيم ل مماس ، فإن المستقيم ل يبعد عن مركزها سم

حقائق على المماس

٢ لإثبات أن المستقيم مماس هنثبت أنه عمودي على نق
أى أن الزاوية اللى بينه وبين نصف القطر قياسها ٩٠



تدريب في الشكل المقابل
اثبت أن AB مماس

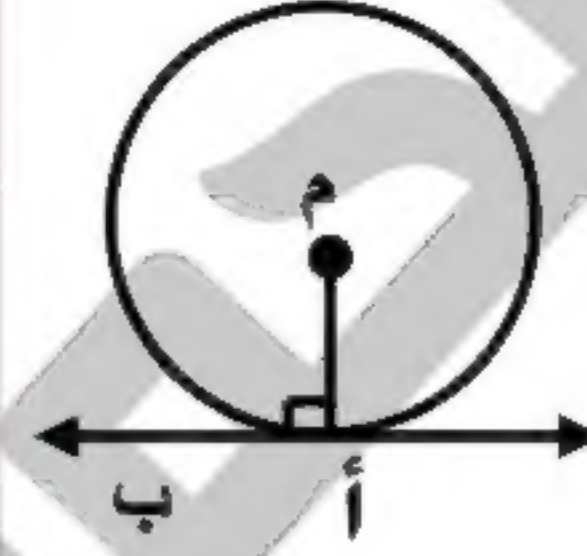
في $\triangle MAB$:

$$\angle MAB = 180^\circ - (54^\circ + 36^\circ) = 90^\circ$$

$\therefore AB$ مماس

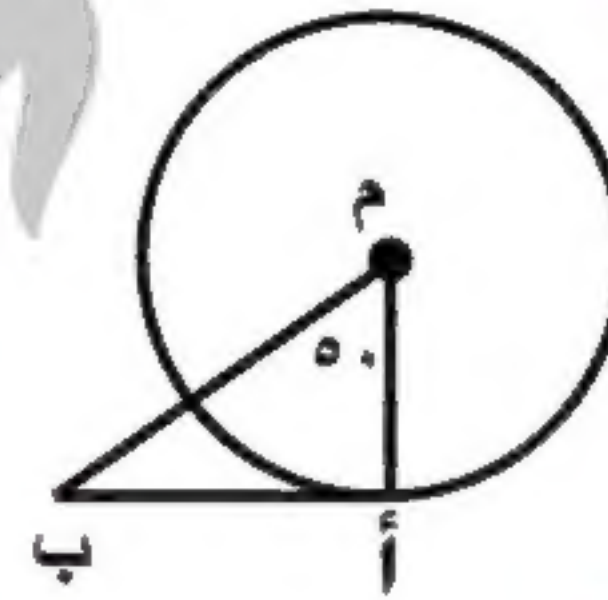
الحل

١ المماس عمودي على نصف القطر
المرسوم من نقطة التماس



$\therefore AB$ مماس ، MA نصف قطر
 $\therefore MA \perp AB$
 $\therefore \angle MAB = 90^\circ$

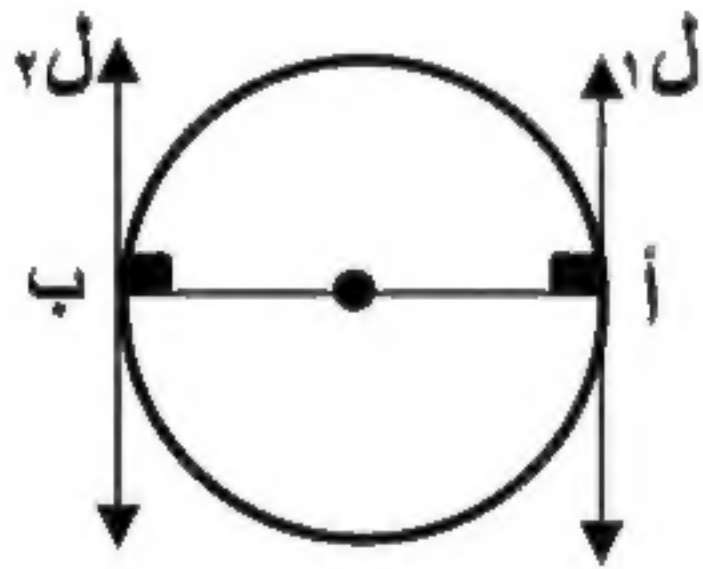
تدريب



في الشكل المقابل :
AB مماس للدائرة
أوجد $\angle B$

الحل

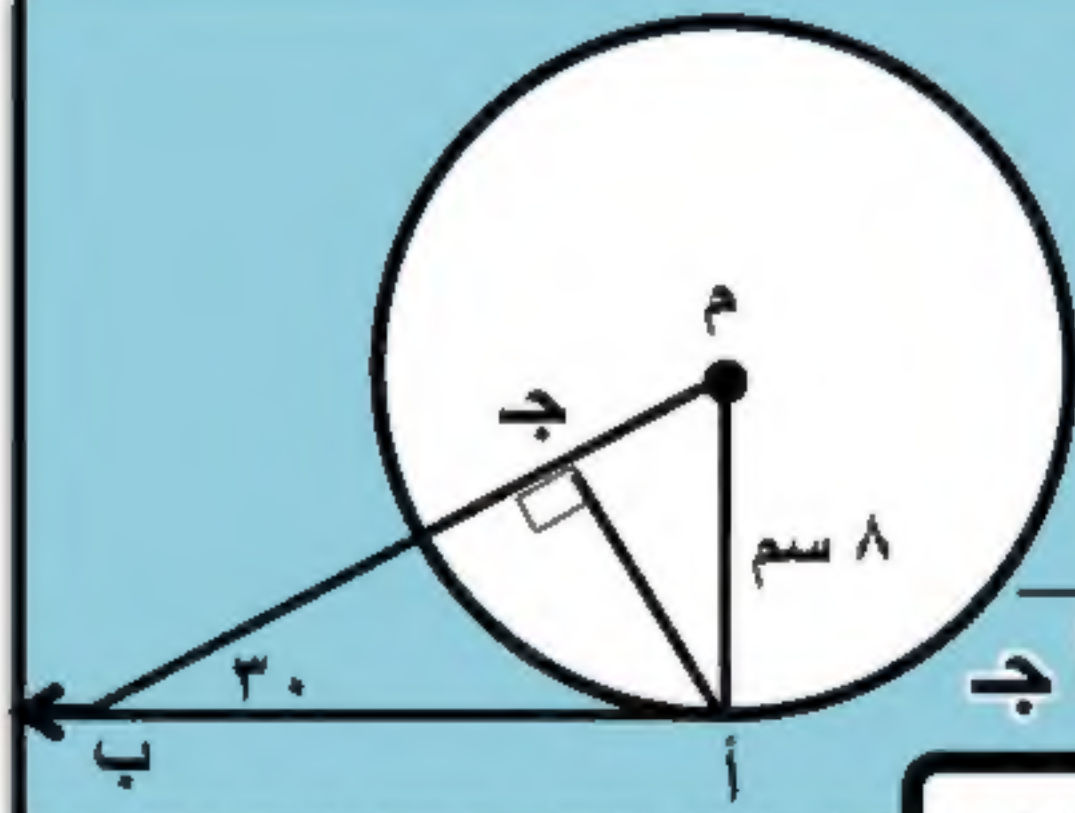
٣ المماسان المرسومان من نهايتى قطر متوازيان



$\therefore AB$ قطر
، $L1$ ، $L2$ مماسان
 $\therefore L1 \parallel L2$

ملحوظة : المماسان المرسومان من نهايتى وتر متقاطعان

مثال ٢



AB مماس للدائرة عند أ
 $MA = 8$ سم
 $\angle B = 30^\circ$
أوجد طول كل من AB ، AJ

الحل

$\therefore AB$ مماس $\therefore MA \perp AB$ $\therefore \triangle MAB$ قائم

$$\angle B = 30^\circ \therefore \angle MAB = 90^\circ \therefore \angle AMB = 60^\circ$$

من فيثاغورث : في $\triangle MAB$

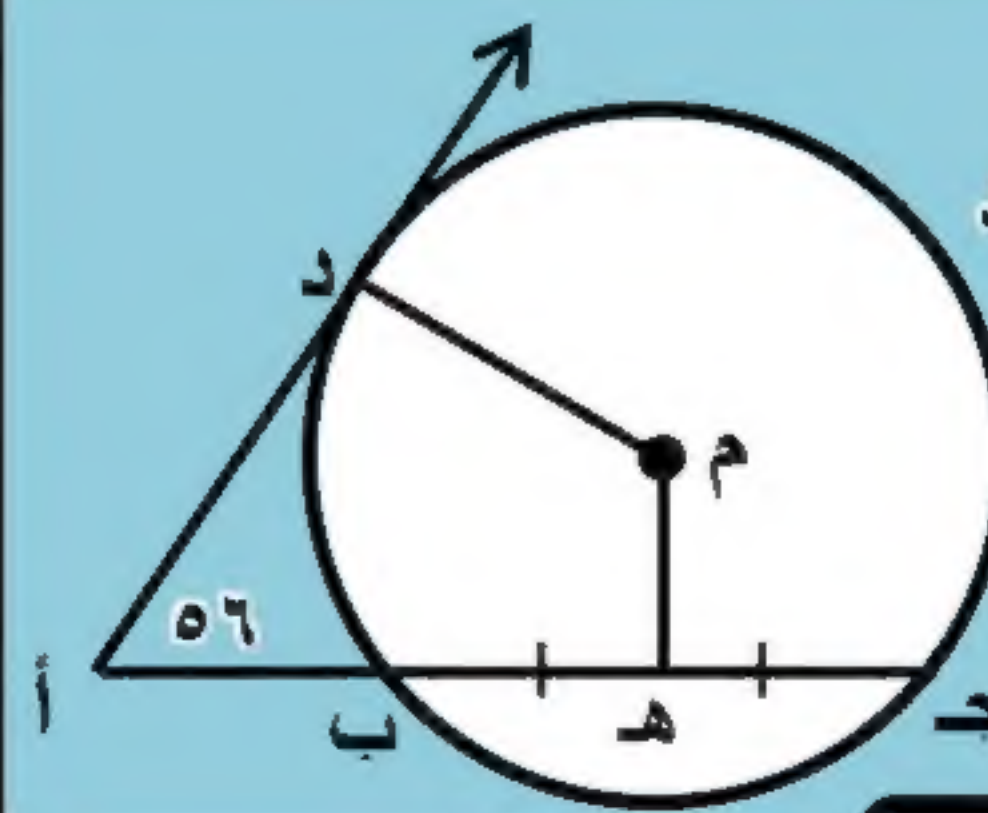
$$AB^2 = MB^2 - MA^2 = 16^2 - 8^2 = 192 \therefore AB = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$

في $\triangle ABJ$: $\therefore AJ$ هو الضلع المقابل للزاوية 30°

$$\therefore AJ = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

ملحوظة: يمكن حساب AJ باستخدام نظرية اقليدس

مثال ١



AD مماس للدائرة عند أ
هـ منتصف ب ج
 $\angle A = 56^\circ$
أوجد $\angle DMB$

الحل

$\therefore AD$ مماس ، MA نصف قطر $\therefore MA \perp AD$

$$\angle DAB = 90^\circ$$

\therefore هـ منتصف ج ب $\therefore MA \perp AB$

$$\angle DMB = 90^\circ$$

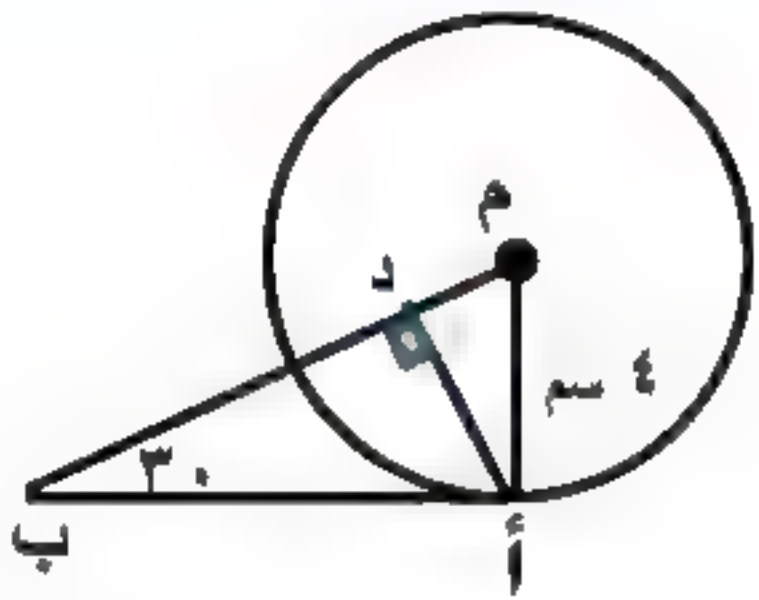
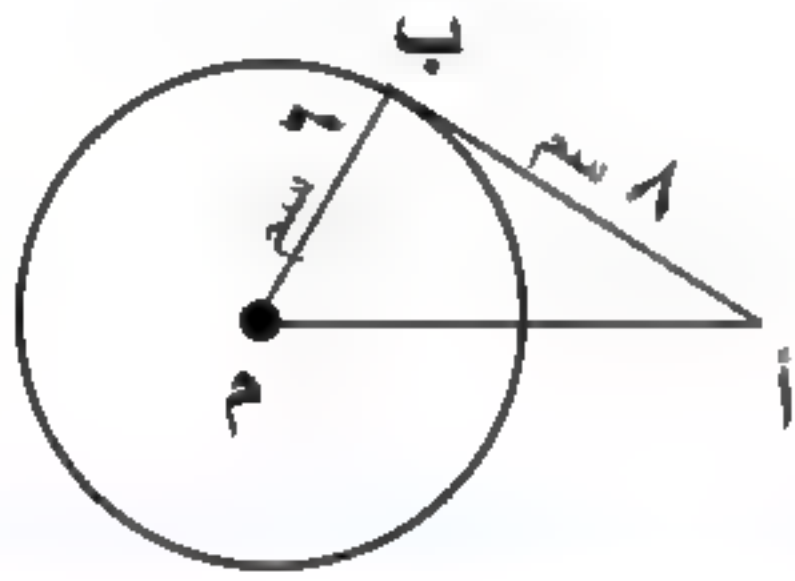
\therefore مجموع قياسات الشكل الرباعي M هـ أ د = 360°

$$\therefore \angle DMB = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 56^\circ) = 124^\circ$$

$$124^\circ = 236^\circ - 360^\circ$$

اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين:

- ① إذا كانت نقطة تقع على الدائرة م التي قطرها ٦ سم فإن أ م = سم (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦)
- ② المماس لدائرة طول نصف قطرها ٥ سم يكون على بعد سم من مركزها (صفر ، ٣ ، ٥ ، ١٠)
- ③ وتر طوله ٨ سم في دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها سم
(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٨
- ④ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = Φ فإن المستقيم ل يكون
(أ) محور تماثل (ب) خارج الدائرة (ج) قاطع للدائرة (د) مماس للدائرة
- ⑤ دائرة محيطها ٦ π سم والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم فإن المستقيم ل يكون
(أ) مماس للدائرة (ب) خارج الدائرة (ج) قاطع للدائرة (د) قطر
- ⑥ في الشكل المقابل: أ ب مماس للدائرة م
م ب = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم فإن أ م = سم
(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٢ (د) ١٣



أكمل:

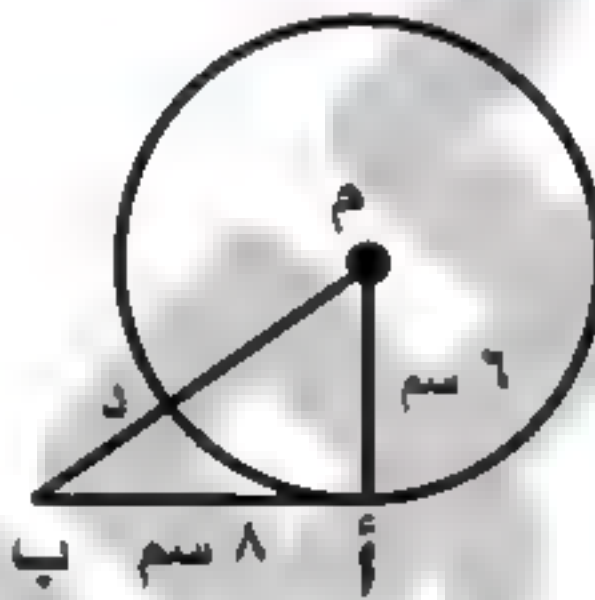
ق (م أ ب) =

م ب = سم

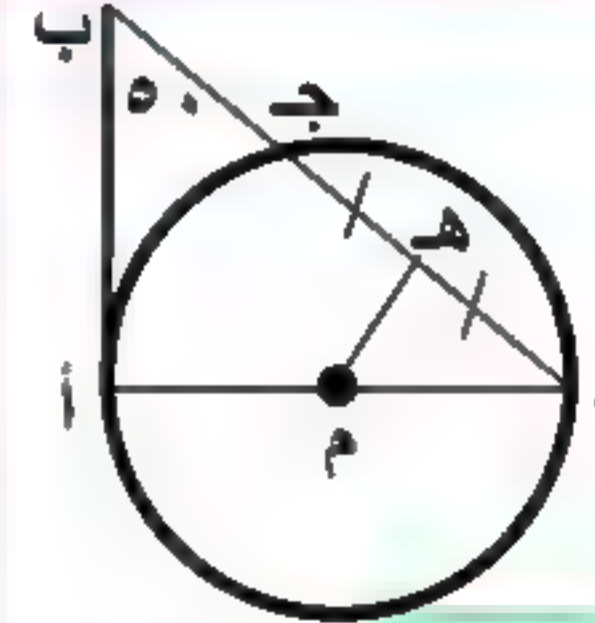
أ ب = سم

ق (م) = سم

أ د = سم

أ ب مماس
أوجد طول د ب

الحل

أ ب مماس ، د أ قطر
هـ منتصف ج د

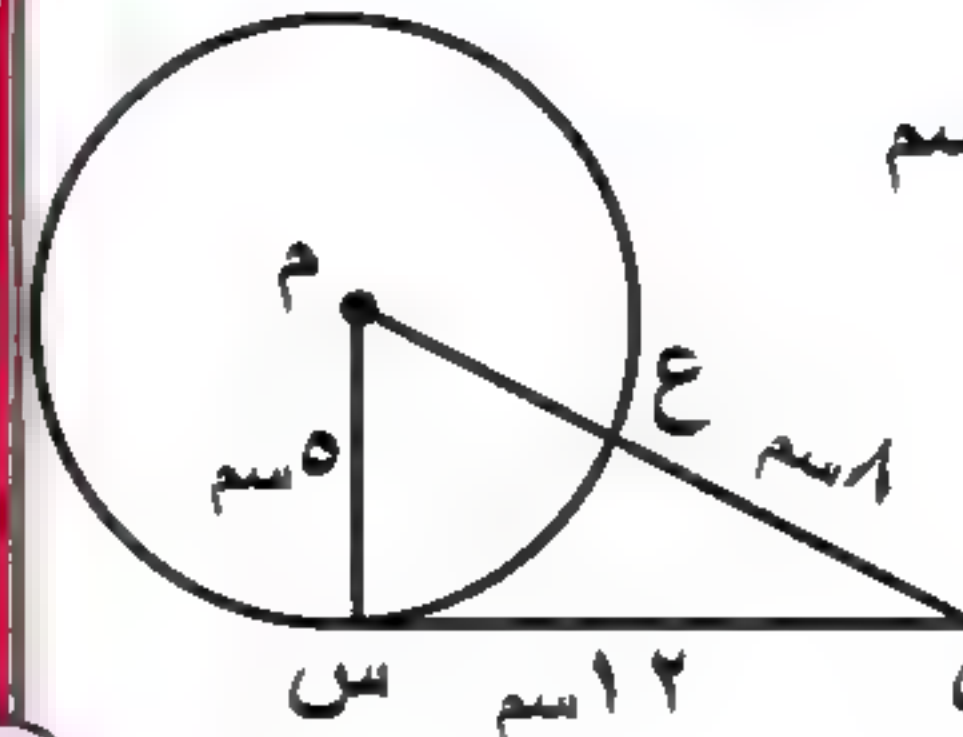
ق (ب) = ٥٠°

أوجد: ق (أ م هـ)

الحل

في الشكل المقابل:

م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم



ص ع = ٨ سم ،

ص س = ١٢ سم

اثبت أن س ص مماس

الحل

أوضاع دائرة بالنسبة لدائرة

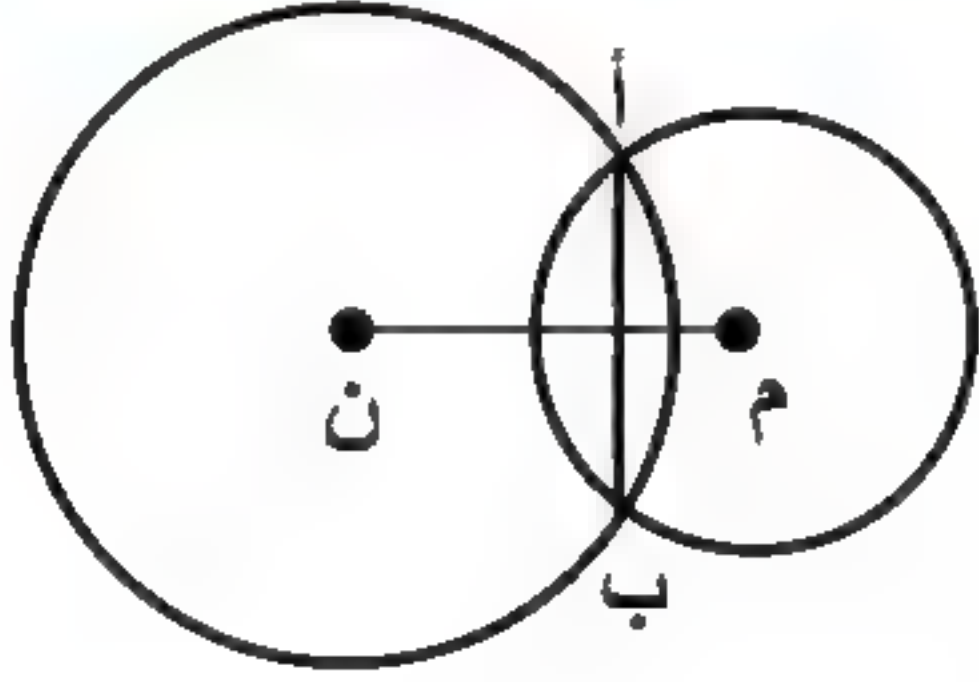
الدرس
الثالث

3

إذا كانت م ، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ ، م ن خط المراكز فإن الدائرتان تكونان :

متقاطعتان

٣



* $نق_1 - نق_2 > م ن > نق_1 + نق_2$

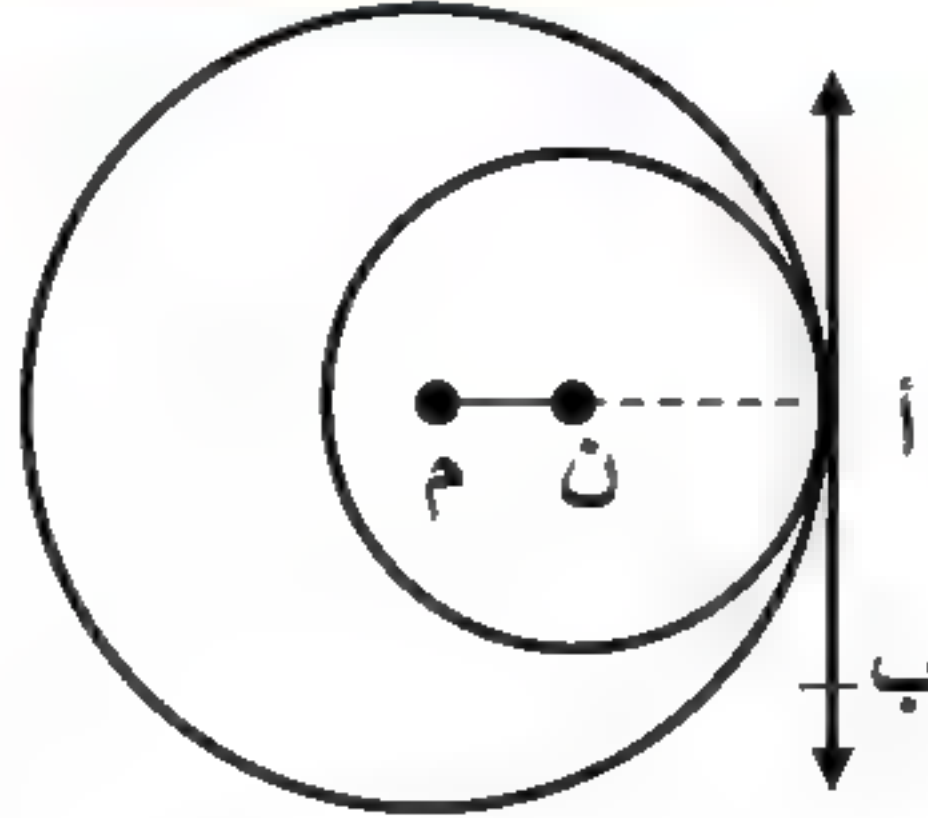
الطرح $> م ن > المجموع$

* الدائرة م \cap الدائرة ن = { أ ، ب }

* أ ب يسمى وتر مشترك

متماسستان من الداخل

٢



* إذا كان : $م ن = نق_1 - نق_2$

م ن = الطرح

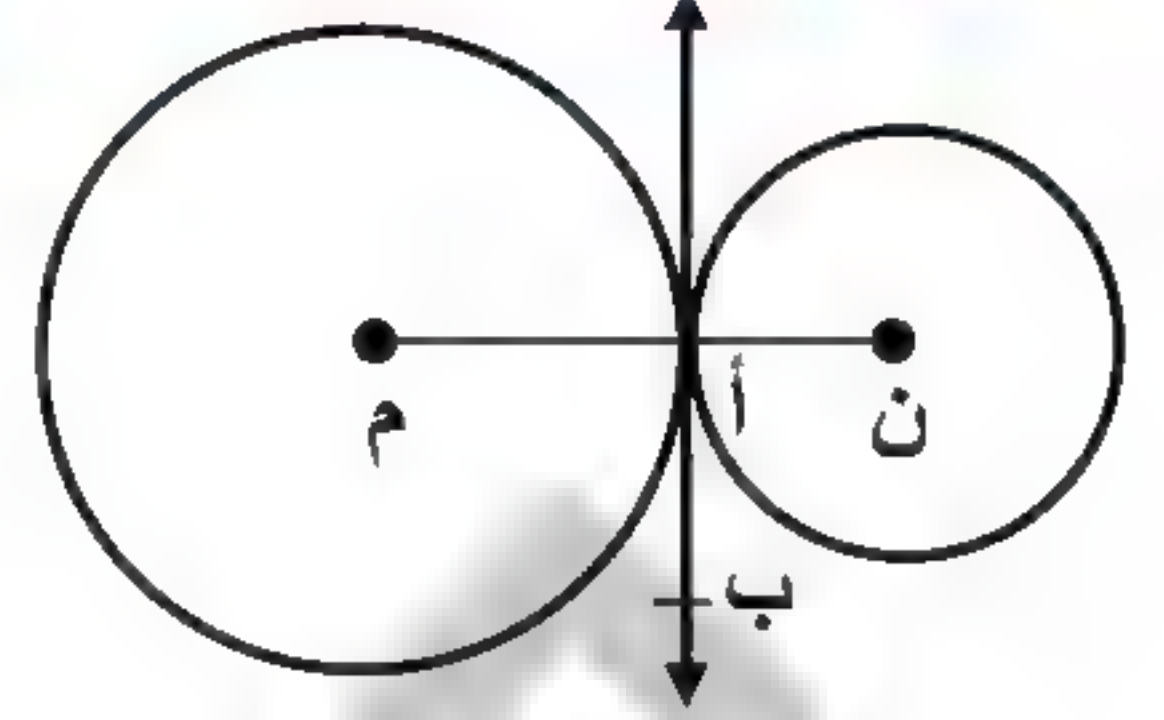
* الدائرة م \cap الدائرة ن = { أ }

* سطح م \cap سطح ن = سطح ن

* أ ب يسمى مماس مشترك

متماسستان من الخارج

١



* إذا كان : $م ن = نق_1 + نق_2$

م ن = المجموع

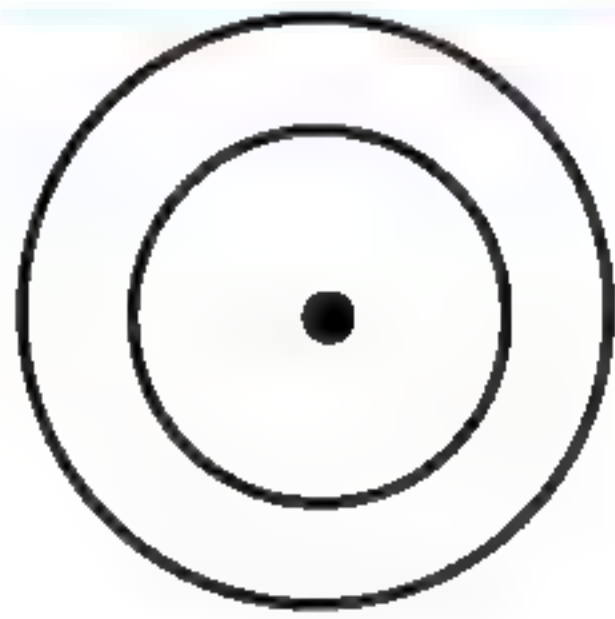
* الدائرة م \cap الدائرة ن = { أ }

* سطح م \cap سطح ن = { أ }

* أ ب يسمى مماس مشترك

متحدتا المركز

٦



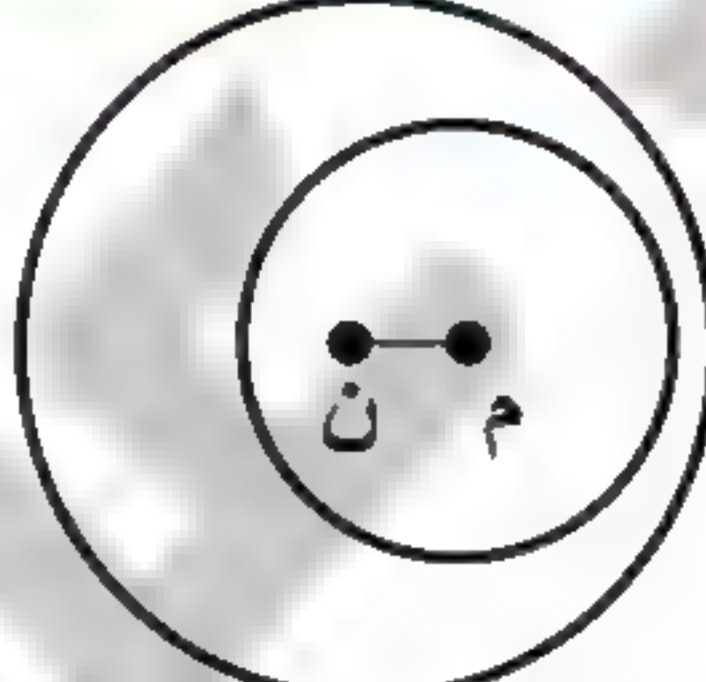
* إذا كان : $م ن = صفر$

* الدائرة م \cap الدائرة ن =

* سطح م \cap سطح ن = سطح م

متداخلتان

٥



* $م ن > نق_1 - نق_2$

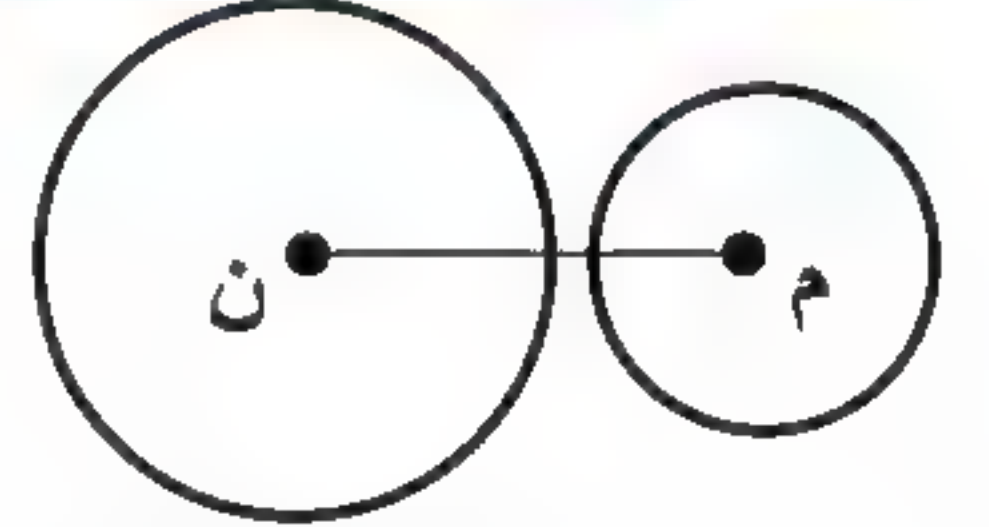
م ن > الطرح

* الدائرة م \cap الدائرة ن = Φ

* سطح م \cap سطح ن = سطح م

متباعدتان

٤



* إذا كان : $م ن < نق_1 + نق_2$

م ن < المجموع

* الدائرة م \cap الدائرة ن = Φ

* سطح م \cap سطح ن = Φ

ملحوظة : عشان تحدد وضع الدائرتان اجمع $نق_1 + نق_2$ والطرح $نق_1 - نق_2$ وقارنهم بخط المراكز

تدريب

م ، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما ٩ سم ، ٥ سم حدد موضع الدائرتان عندما :

٣- م ن = ٣ سم

الدائرتان

٢- م ن = ٤ سم

الدائرتان

١- م ن = ١٤ سم

الدائرتان

٦- م ن = ٧ سم

الدائرتان

٥- م ن = صفر

الدائرتان

٤- م ن = ١٦ سم

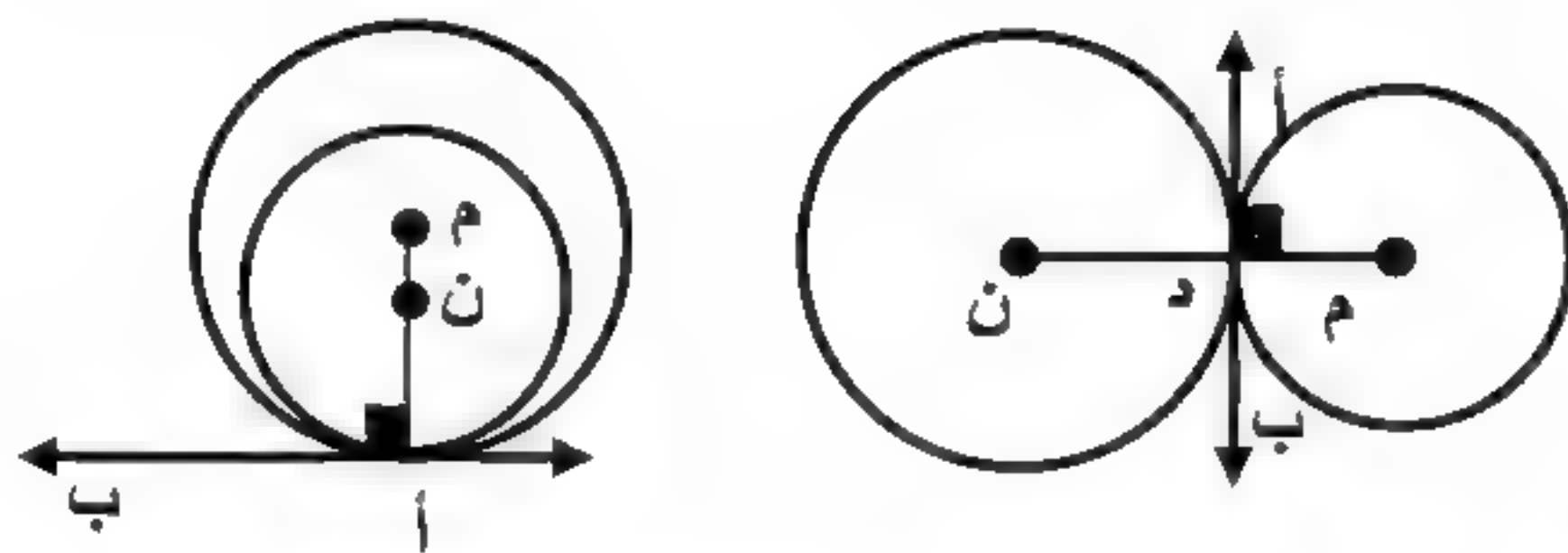
الدائرتان

نتائج هامة على خط المركزين



٢ في الدائرتان المتماستان

خط المركزين عمودي على المماس المشترك

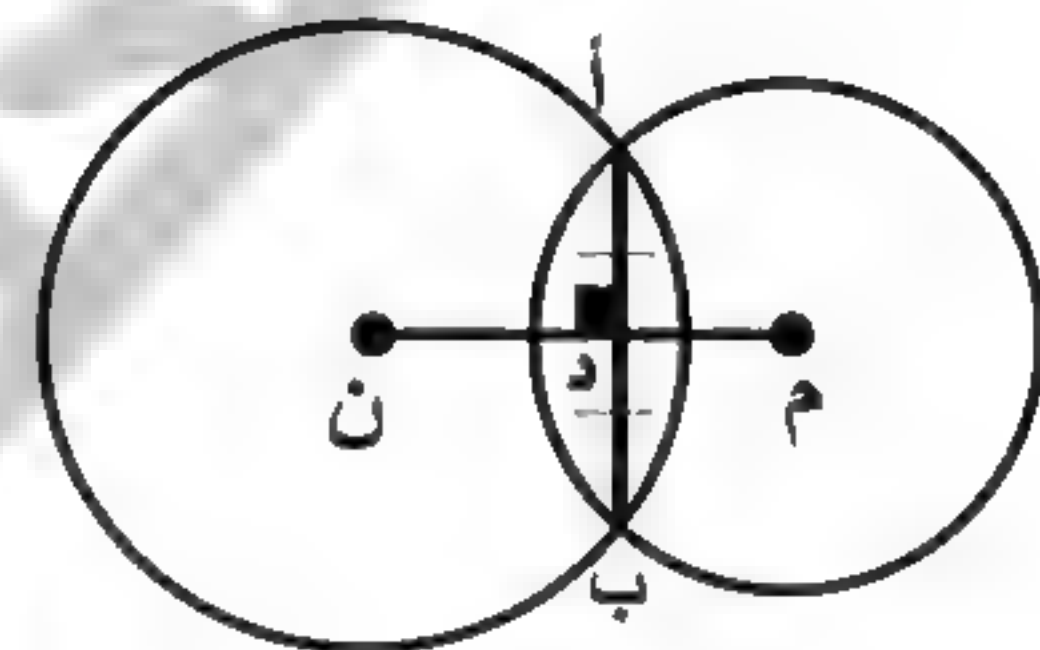


∴ \overline{AB} مماس مشترك ، M ، N خط المركزين
 ∴ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ ∴ $\angle (M \hat{D} A) = 90^\circ$



١ في الدائرتان المتقاطعتان

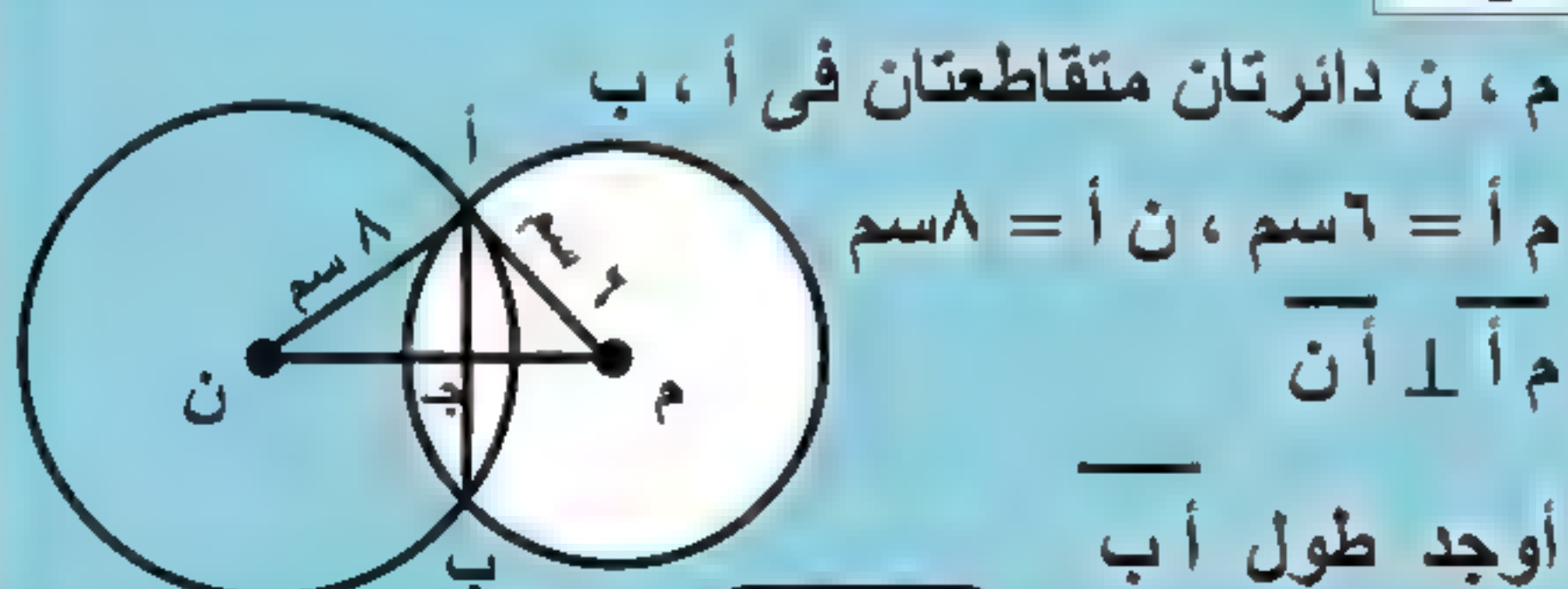
خط المركزين عمودي على الوتر المشترك وينصفه



∴ \overline{AB} وتر مشترك ، M ، N خط المركزين
 ∴ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ ∴ $\angle (M \hat{D} A) = 90^\circ$
 ، M ينصف \overline{AB} ∴ $AD = DB$

تصميم محمود عوض م
 معلم رياضيات

مثال ٢



الحل

في $\triangle AMN$ (من فيثاغورث) :

$$\because \overline{MA} \perp \overline{MN} \therefore (MN)^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

$$\therefore MN = 10 \text{ سم}$$

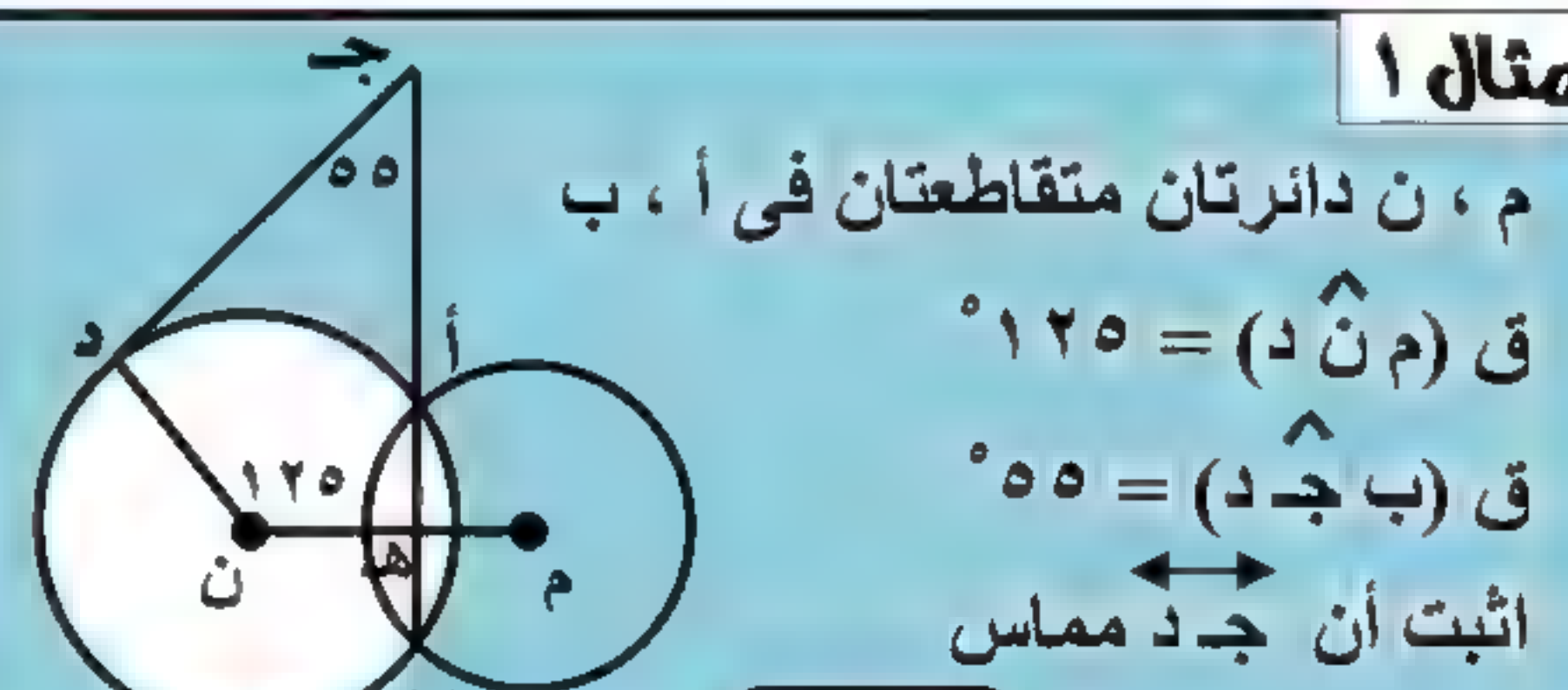
∴ \overline{AB} وتر مشترك ∴ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$

$$\text{من إقليدس : } \overline{AD} = \frac{AM \times AN}{MN} = \frac{6 \times 8}{10} = 4,8 \text{ سم}$$

∴ \overline{AB} وتر مشترك ∴ M ينصف \overline{AB}

$$\therefore \overline{AB} = 4,8 \times 2 = 9,6 \text{ سم}$$

مثال ١



الحل

∴ \overline{AB} وتر مشترك ، M ، N خط المركزين
 ∴ $\overline{AB} \perp \overline{MN}$ ∴ $\angle (A \hat{H} N) = 90^\circ$

∴ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°

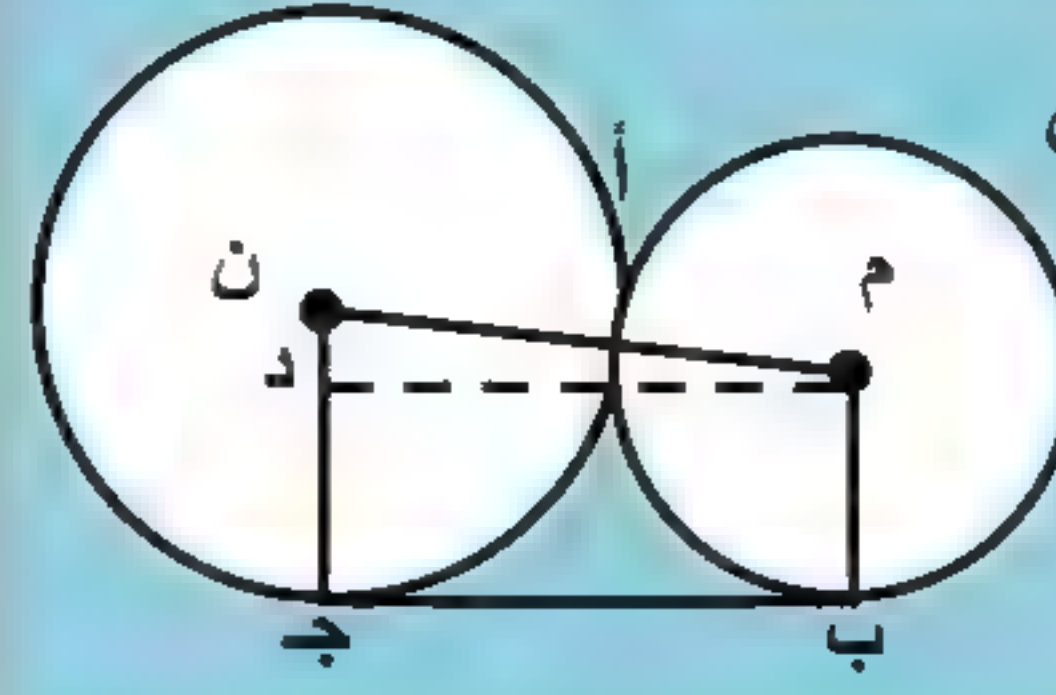
$$\therefore \angle (D \hat{A} N) = 360 - (90 + 55 + 125) = 90^\circ$$

$$\therefore \overline{ND} \perp \overline{AD}$$

$$\therefore \overline{AD} \text{ مماس}$$

(وهو المطلوب اثباته)

مثال ٣



م ، ن دائرتان متماستان
ب ج مماس مشترك
م ب = ٥ سم ،
ن ج = ٨ سم
أوجد طول ب ج

الحل

العمل : نرسم م د \perp ن ج

ب ج مماس مشترك : م ب \perp ب ج ، ن ج \perp ب ج

الشكل م ب ج د مستطيل

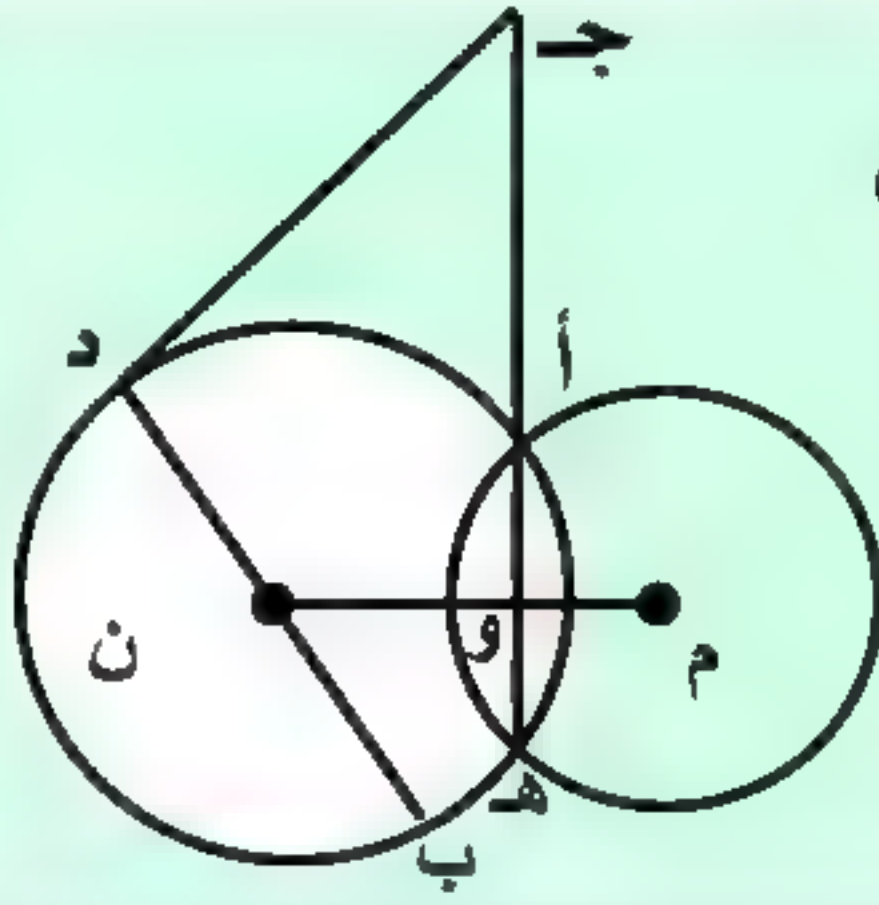
ب ج = م ب = ٥ سم : ن د = ٨ - ٥ = ٣ سم

م ن = ٨ + ٥ = ١٣ سم ومن فيثاغورث في Δ م د ن :

$$(م د)^2 = ١٦٩ - ٩ = ١٦٠$$

$$م د = \sqrt{١٦٠} ، ب ج = \sqrt{١٦٠}$$

مثال ٤



م ، ن دائرتان متقاطعتان
ج د مماس
د ب قطر
اثبت أن :
ق (و ن ب) = ق (ج د)

الحل

ب ج وتر مشترك : م ن \perp أ هـ
ق (أ و ن) = ٩٠

ج د مماس : ج د \perp د ن : ق (د) = ٩٠

في الشكل الرباعي ج و ن د ينتج أن :

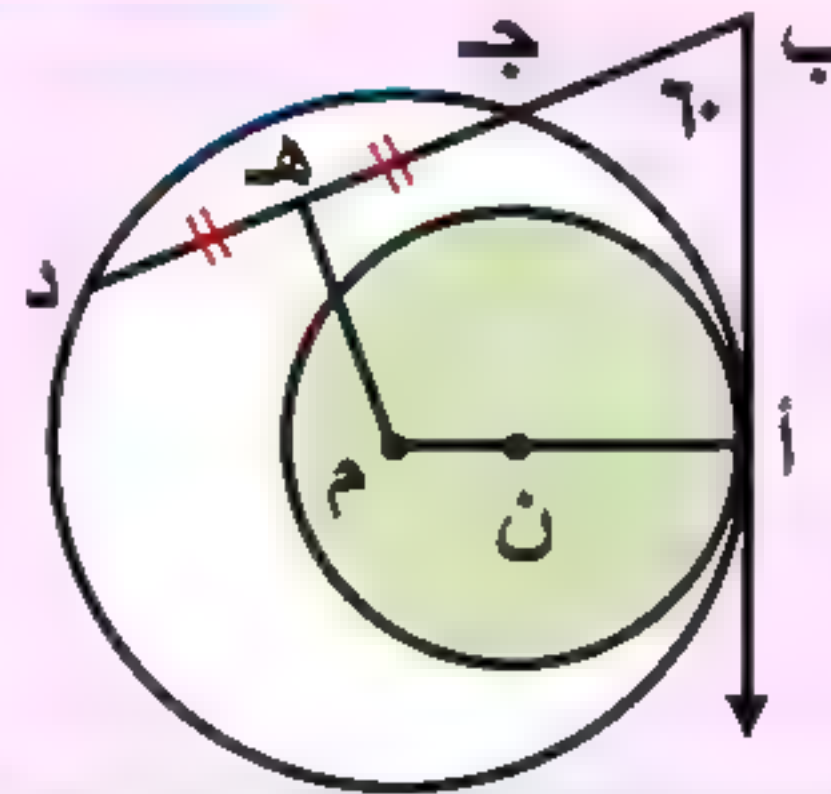
$$ق (و ن د) + ق (ج د) = ١٨٠ \leftarrow ١$$

$$ق (و ن د) + ق (و ن ب) = ١٨٠ \leftarrow ٢ \text{ زاوية مستقيمة}$$

من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (ج د) = ق (و ن ب)

تدريبات

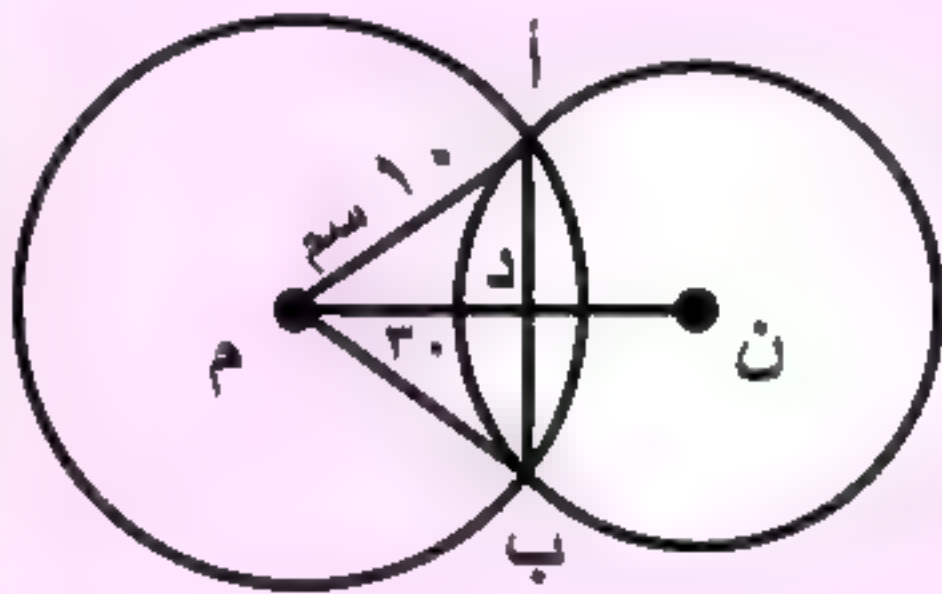
تدريب ١



م ، ن دائرتان متماستان
هـ منتصف ج د
ق (ب) = ٦٠
أوجد ق (أ م هـ)

الحل

تدريب ٢



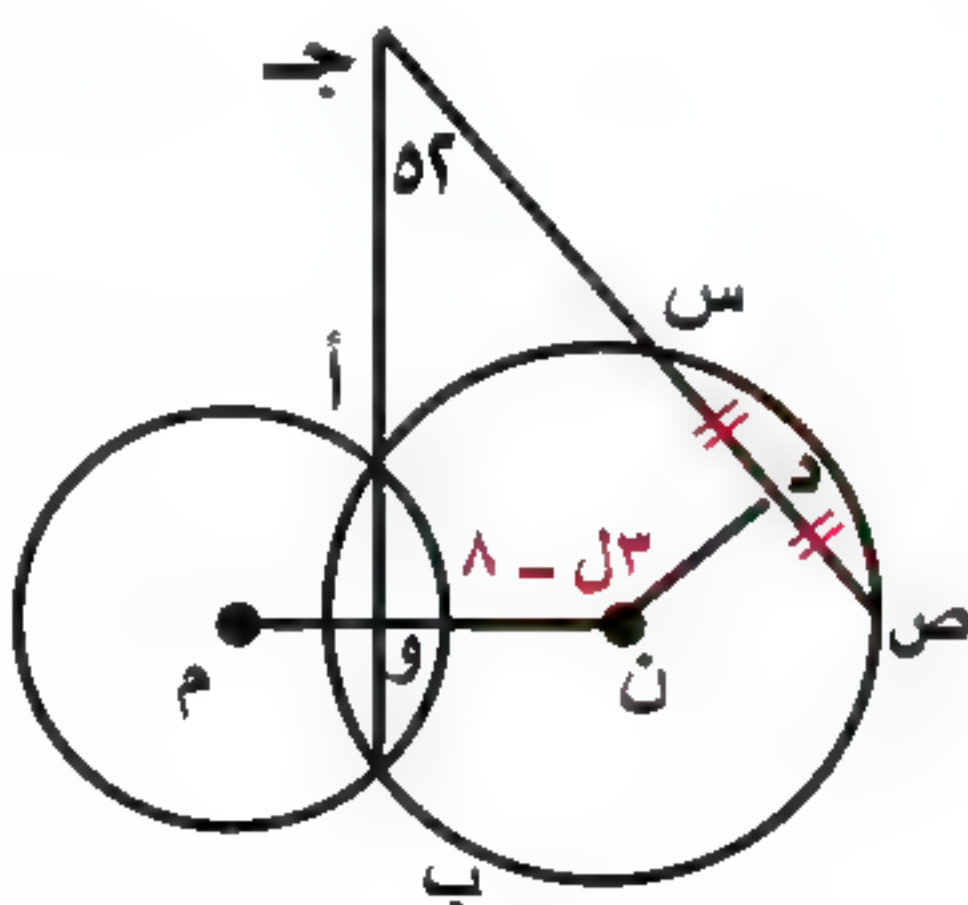
م ، ن دائرتان متقاطعتان
م أ = ١٠ سم
ق (ب م ن) = ٣٠
أوجد طول أ ب

تمارين

- ① خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على وينصفه
(أ) القطر (ب) الوتر (ج) الوتر المشترك (د) المماس
- ② دائرتان م ، ن متماستان من الداخل ، أنصاف أقطارهم ٥ سم ، ٩ سم فإن م ن = سم
(أ) ١٤ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٩
- ③ م ، ن دائرتان متقاطعتان وطولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٢ سم فإن م ن =
(أ) [٧ ، ٣] (ب) [٧ ، ٣] (ج) [٧ ، ٣] (د) [٧ ، ٣]
- ④ إذا كان سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = { أ } وطول نصف قطر أحدهما ٣ سم ، م ن = ٨ سم
فإن طول نصف قطر الأخرى = سم
(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ١١ (د) ١٦
- ⑤ إذا كان الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج وطول نصف قطر إحداهما ٥ سم ، م ن = ٩ سم
فإن طول نصف قطر الأخرى = سم
(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) ١٤
- ⑥ م دائرة طول قطرها ٧ سم ، أ نقطة في مستوى الدائرة وكان م أ = ٤ سم فإن أ تقع
(أ) داخل الدائرة (ب) خارج الدائرة (ج) على الدائرة (د) على مركز الدائرة
- ⑦ م ، ن دائرتان متباعدتان طولاً نصفى قطريهما ٨ سم ، ٦ سم على الترتيب فإن م ن سم
(أ) > (ب) < (ج) = (د) ≤
- ⑧ محور التماثل للوتر المشترك أ ب لدائرتين متقاطعتين م ، ن هو
(أ) م أ (ب) م ب (ج) م ن (د) ن أ
- ⑨ إذا كان سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتان م ، ن تكونان
(أ) متباعدتان (ب) متحدثى المركز (ج) متقاطعتان (د) متماستان من الخارج

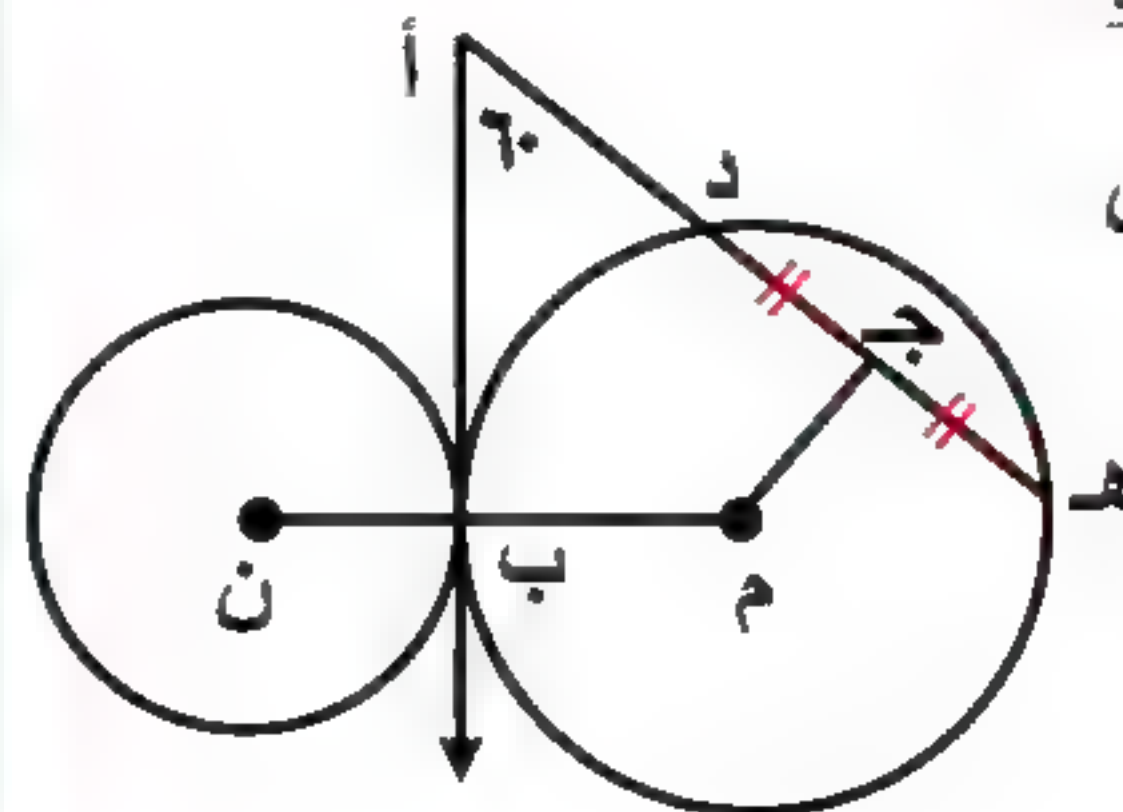
٢ في الشكل المقابل:

أوجد قيمة ل

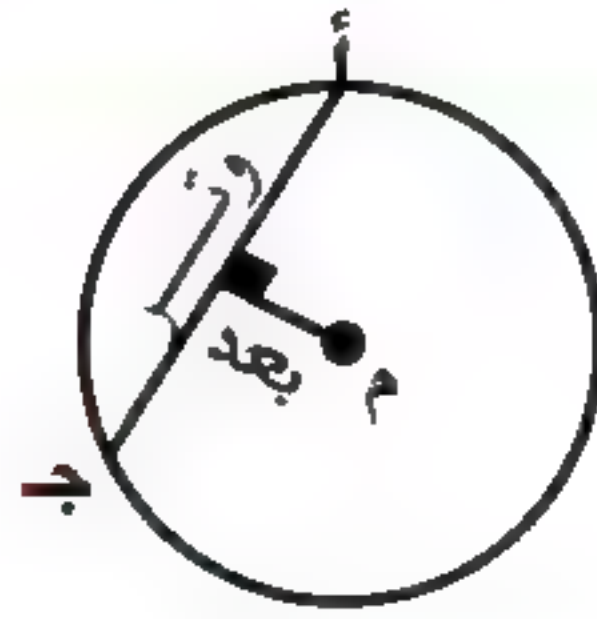


١ في الشكل المقابل:

م ، ن دائرتان متماستان
ج منتصف د هـ
ق (أ) = ٦٠°
أوجد ق (ج م ب)



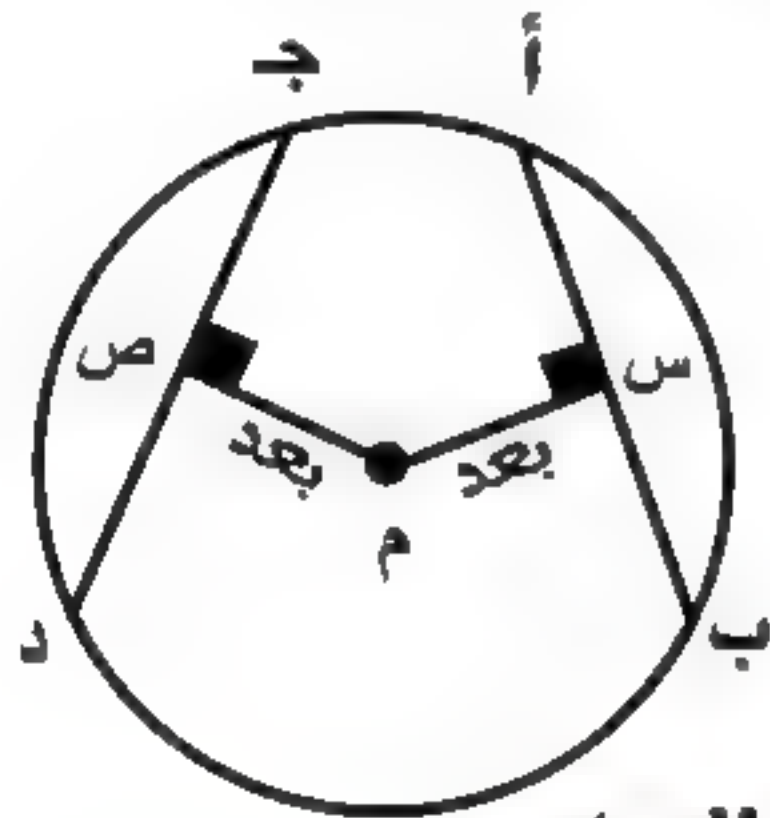
علاقة أوتار الدائرة بمركزها

الدرس
الرابع 4

البعد لازم يكون عمودي

ولو قالك انه ينصف الوتر استنتج من التنصيف انه عمودي

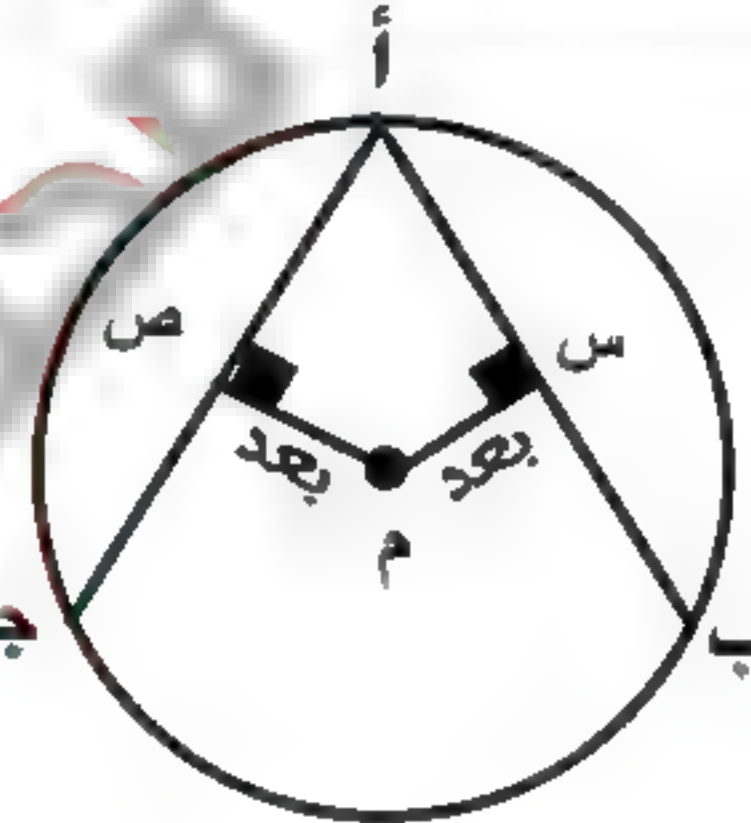
في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

إذا كانت الأبعاد متساوية
فإن الأوتار تكون متساوية∴ م س = م ص
(الأبعاد متساوية)∴ أ ب = ج د
(الأوتار متساوية)

لو أعطاك وترين متساويين : استنتج ان البعدين متساويين والعكس.

ولو طلب منك تثبت ان وترين متساويين : حاول تثبت ان البعدين متساويين والعكس.

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

إذا كانت الأوتار متساوية
فإن الأبعاد تكون متساوية∴ أ ب = ج د
(الأوتار متساوية)∴ م س = م ص
(الأبعاد متساوية)

مثال ٢

أ ب ج ∆ مرسوم داخل دائرة م
ق (ب) = ق (ج) (ب) = ق (ج)
س منتصف أ ب ، م ص ⊥ أ ج
اثبت أن : م س = م ص

الحل

∴ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

في ∆ أ ب ج :

∴ ق (ب) = ق (ج)

∴ أ ب = ج د (أوتار متساوية)

∴ م س = م ص (الأبعاد متساوية)

مسألة من النماذج

مثال ١

أ ب = ج د
م د ⊥ أ ب ، م ه ⊥ أ ج
اثبت أن : س د = ص ه

الحل

∴ أ ب = ج د (أوتار متساوية)

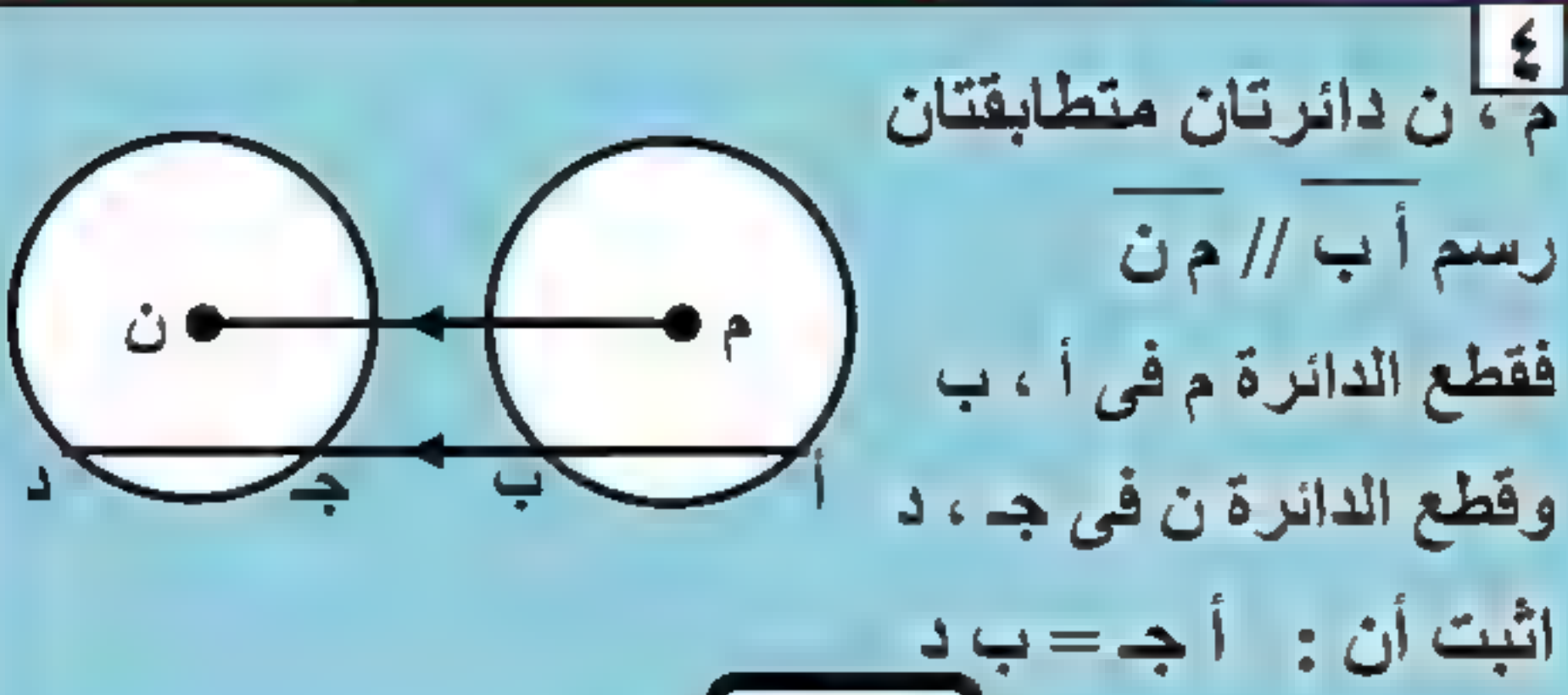
∴ م د ⊥ أ ب ، م ه ⊥ أ ج

∴ م د = م ه (١) (الأبعاد متساوية)

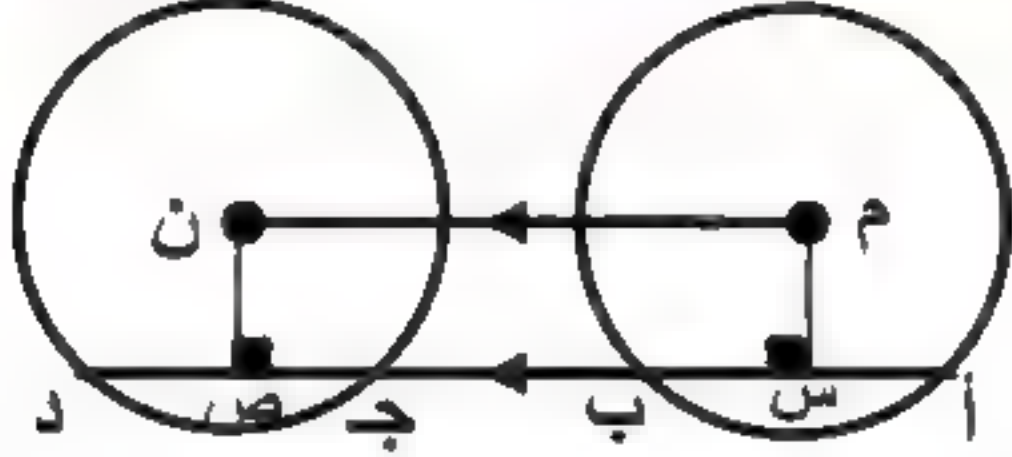
∴ م س = م ص (٢) (أنصاف أقطار)

بطرح ١ من ٢ ينتج أن :

س د = ص ه

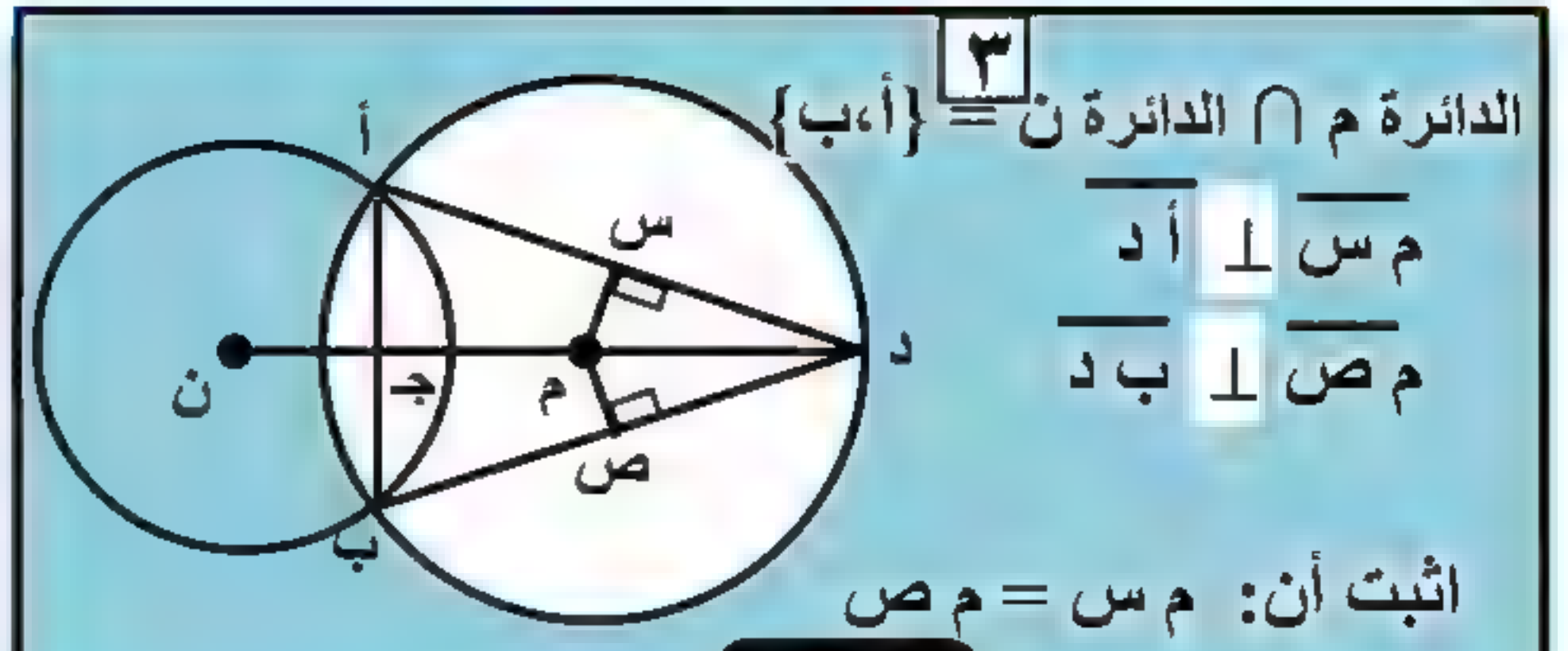


الحل

العمل: نرسم $\overline{MS} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{NS} \perp \overline{CD}$ 
 $\therefore \overline{MN} \parallel \overline{AB}$ ، $\overline{MS} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{NS} \perp \overline{CD}$
 \therefore الشكل م س ص ن مستطيل

 $\therefore \overline{MS} = \overline{NS}$ (أبعاد متساوية)

 $\therefore \overline{AB} = \overline{CD}$ (الأوتار متساوية)

بإضافة ب ج للطرفين
 $\therefore \overline{AJ} = \overline{BD}$ هـ ط ث


الحل

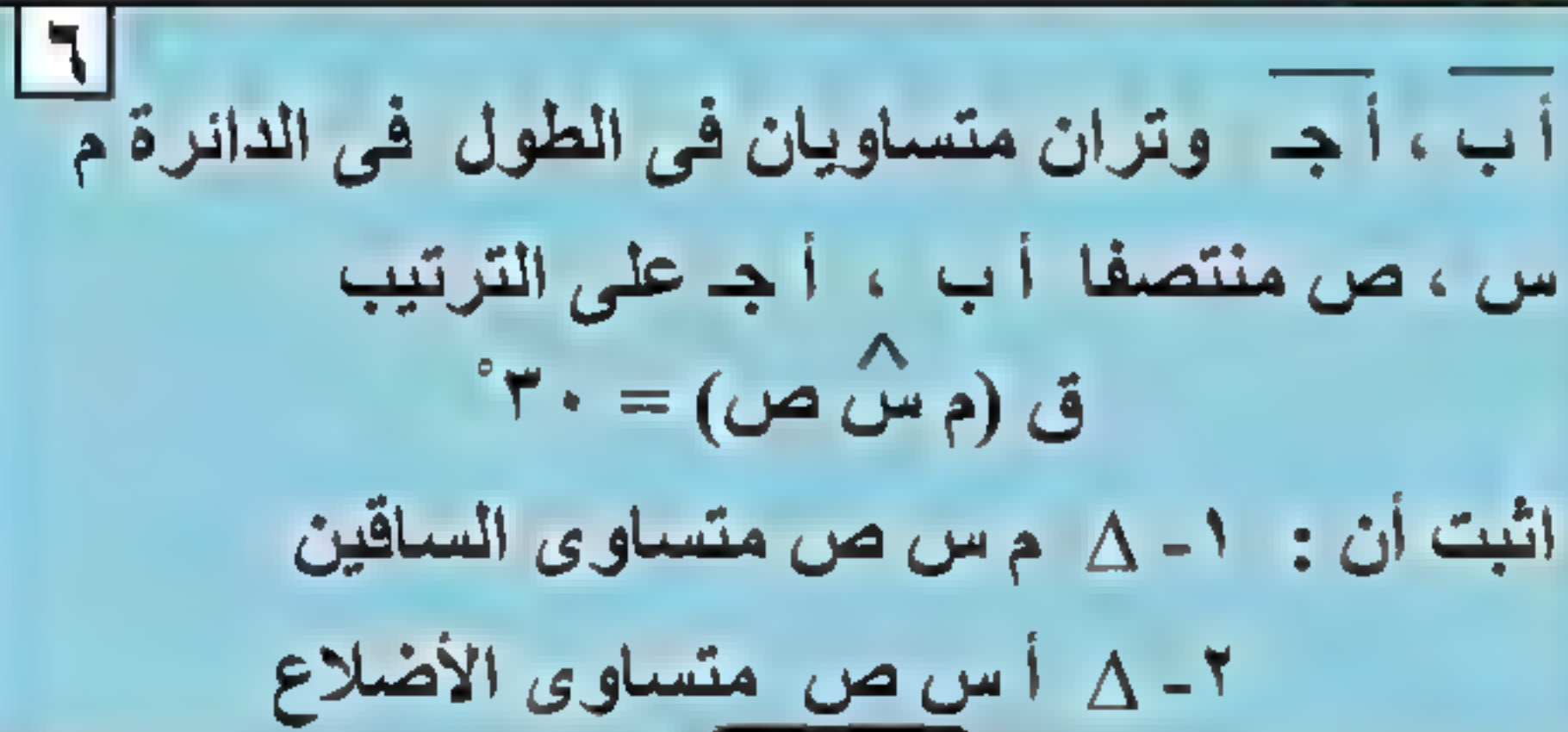
 $\therefore \overline{AB}$ وتر مشترك ، م ن خط المراكز

 $\therefore \overline{MN} \perp \overline{AB}$ ، ج منتصف \overline{AB}

 أي أنه في $\triangle DAB$: ج د محور تماثل \overline{AB}

 لأن $\overline{DJ} \perp \overline{AB}$ و تتصفه
 $\therefore \triangle DAB$ متساوي الساقين

 $\therefore \overline{DA} = \overline{DB}$ وهي أوتار متساوية
 $\therefore \overline{MS} = \overline{MV}$ أبعاد متساوية
ملحوظة: يمكن الإثبات عن طريق تطابق $\triangle ADJ \cong \triangle BDJ$ ، ب د ج

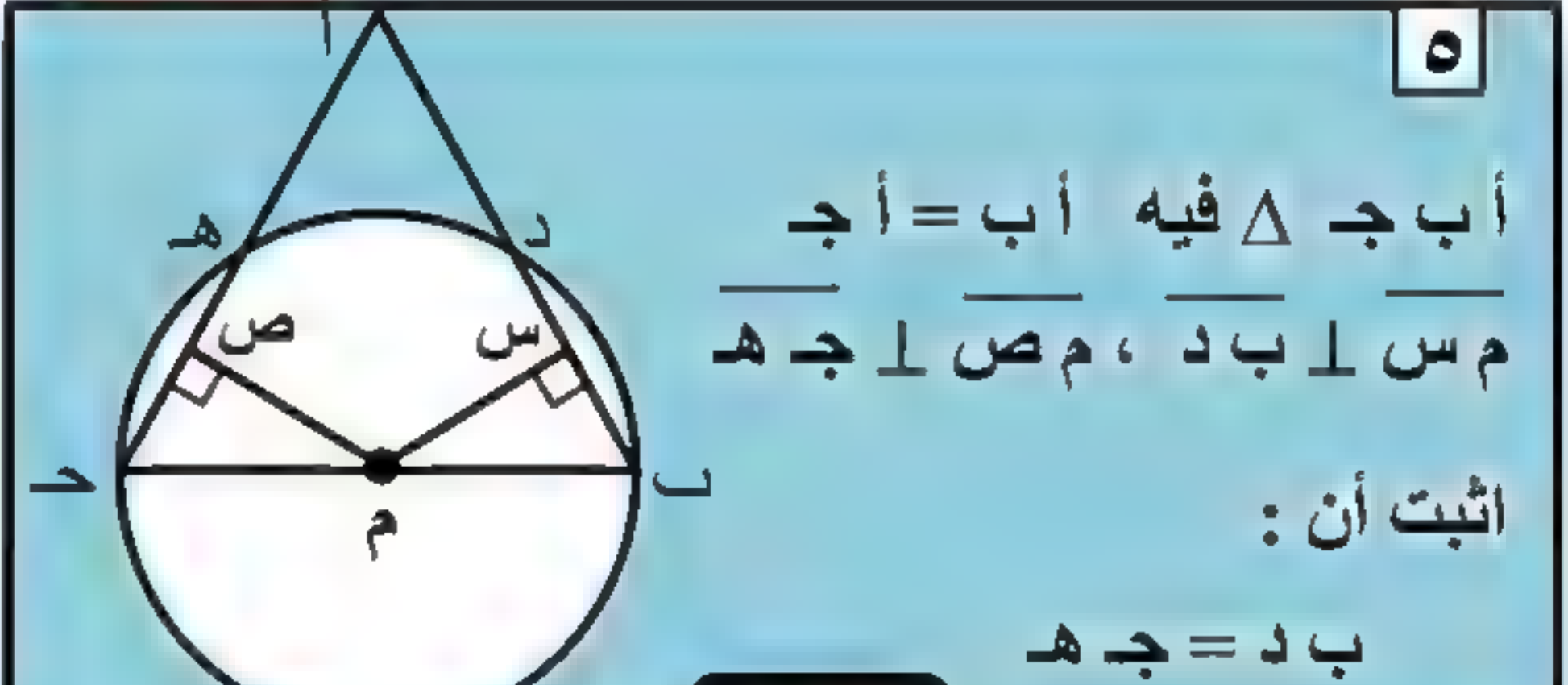
 تصميم محمود عوض م
معلم رياضيات


الحل

 \therefore س منتصف \overline{AB} $\therefore \overline{MS} \perp \overline{AB}$
 \therefore ص منتصف \overline{AC} $\therefore \overline{MV} \perp \overline{AC}$
 $\therefore \overline{AB} = \overline{AC}$ (أوتار متساوية)

 $\therefore \overline{MS} = \overline{MV}$ (أبعاد متساوية)

 $\therefore \triangle م س ص$ متساوي الساقين

 $\therefore \angle ق (م س ص) = 30^\circ$ ، $\angle ق (م س أ) = 90^\circ$
 $\therefore \angle ق (أ س ص) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
 $\angle ق (أ ص س) = 60^\circ$ ، $\angle ق (أ) = 60^\circ$
 $\therefore \triangle أ س ص$ متساوي الأضلاع


الحل

 $\triangle م س ب$ ، $\triangle م ص ج$ فيهما :

 $\overline{MB} = \overline{MC}$ أنصاف أقطار

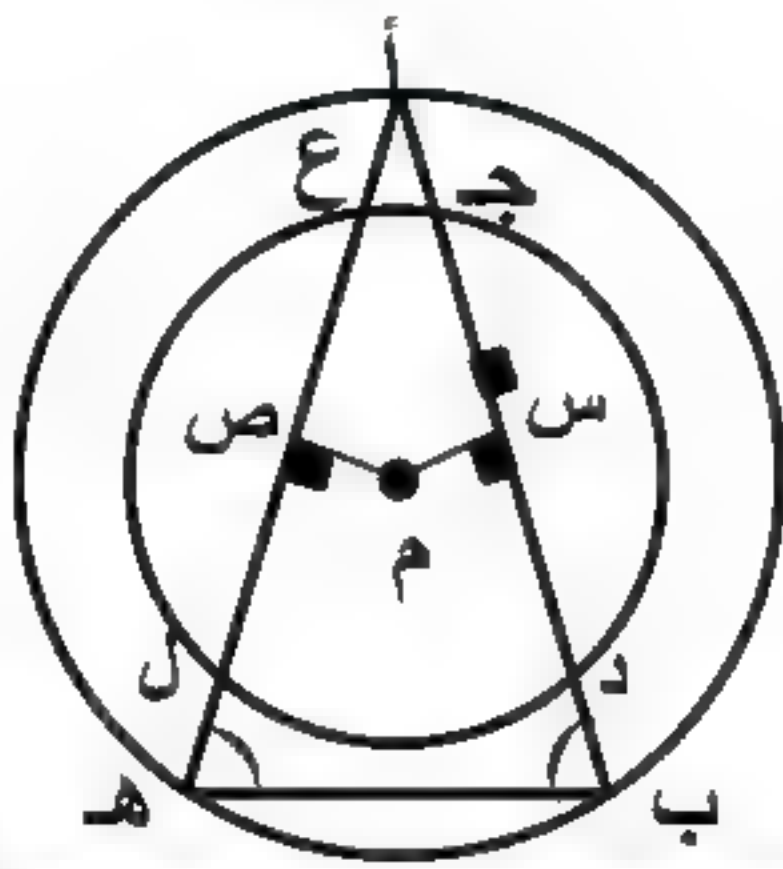
 $\angle ق (م س ب) = \angle ق (م ص ج) = 90^\circ$
 $\angle ق (ب) = \angle ق (ج)$ لأن $\overline{AB} = \overline{AC}$
 $\therefore \triangle م س ب \cong \triangle م ص ج$

 ومن التطابق ينتج أن : $\overline{MS} = \overline{MV}$ (أبعاد)

 $\therefore \overline{MS} \perp \overline{BD}$ ، $\overline{MV} \perp \overline{CE}$
 $\therefore \overline{BD} = \overline{CE}$

تمارين

٣



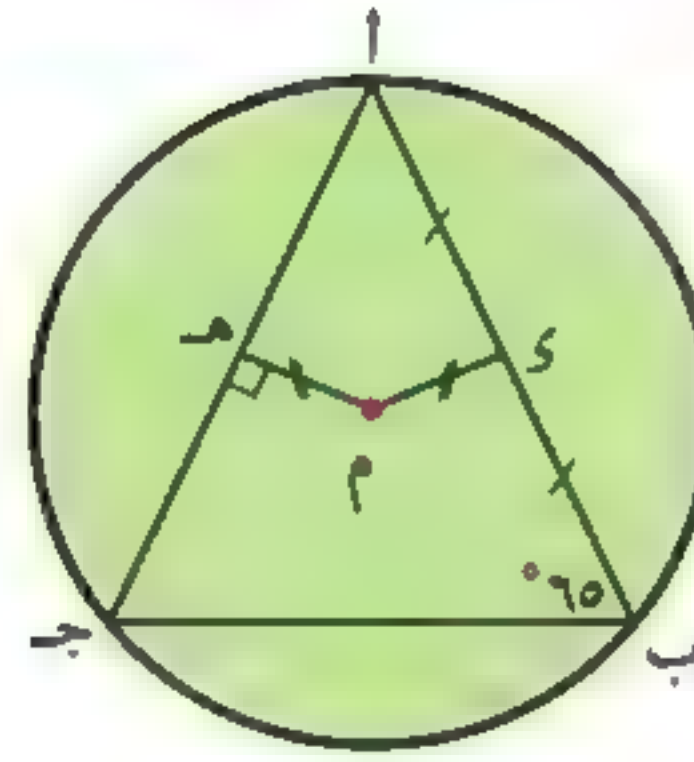
دائرتان متحدتا المركز م

$$\widehat{C}(\widehat{B}) = \widehat{C}(\widehat{A})$$

اثبت أن : $CD = DE$

الحل

١



إذا كان:

$$M = 5$$

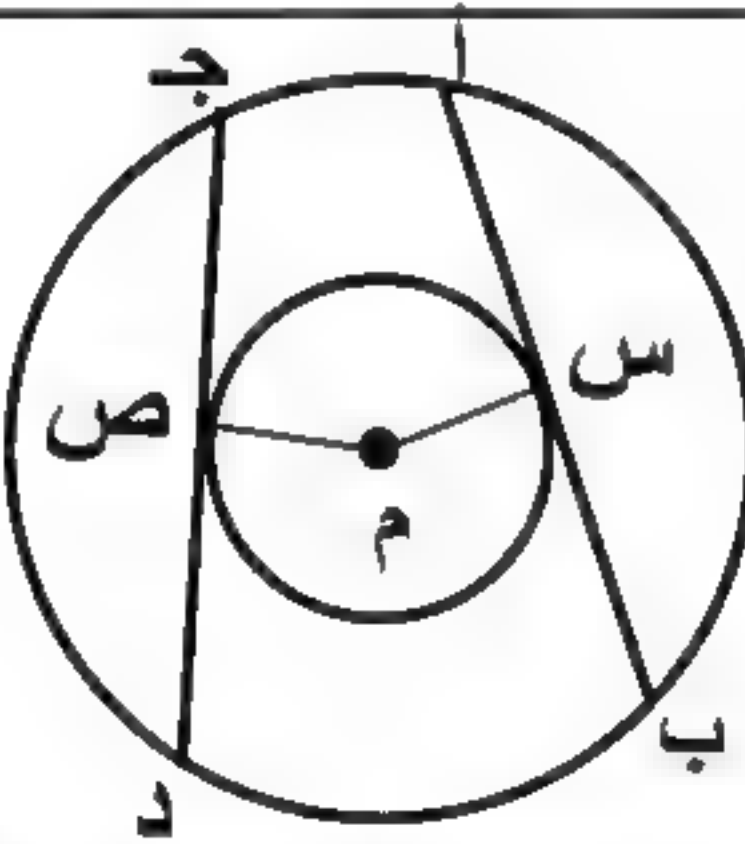
$$\widehat{C}(\widehat{B}) = 60^\circ$$

فاوجد:

$$\widehat{C}(\widehat{A})$$

الحل

٤



دائرتان متحدتا المركز م

أ ب ، ج د مماسان للصغرى

اثبت أن : $AB = CD$

الحل

م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب

س منتصف ج ب

$$M = S$$

$$N = S$$

ن ص \perp ه و اثبت أن: ج ب = و ه

الحل

تعيين الدائرة

الدرس
5
الخامس

تُعَيَّن الدائرة إذا علم : ١- مركزها ٢- طول نصف قطرها

رسم دائرة تمر بنقطة

◆ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة واحدة.

رسم دائرة تمر بنقطتين

◆ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطتين.

◆ ولكن إذا علم طول القطعة المستقيمة AB وطول نصف قطر المطلوبة فإن:

- إذا كان $NQ < \frac{1}{2} AB$ فإنه يمكن رسم دائرتان فقط.
- إذا كان $NQ = \frac{1}{2} AB$ فإنه يمكن رسم دائرة واحدة فقط وهي أصغر دائرة.
- إذا كان $NQ > \frac{1}{2} AB$ فإنه لا يمكن رسم أي دائرة.

مثال: إذا كانت AB قطعة مستقيمة طولها ٧ سم فإن أصغر دائرة يمكن أن تمر بالنقطتين A ، B طول نصف قطرها

رسم دائرة تمر بثلاث نقاط

◆ أي ثلاث نقاط على استقامة واحدة لا يمكن أن تمر بها دائرة.

◆ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة وحيدة.

الدائرة الداخلة للمثلث	الدائرة الخارجة للمثلث
 <p>مركزها هو نقطة تقاطع منصفات زواياها الداخلة</p>	 <p>مركزها هو نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها (محاور تماثل أضلاعها)</p>

ملاحظات

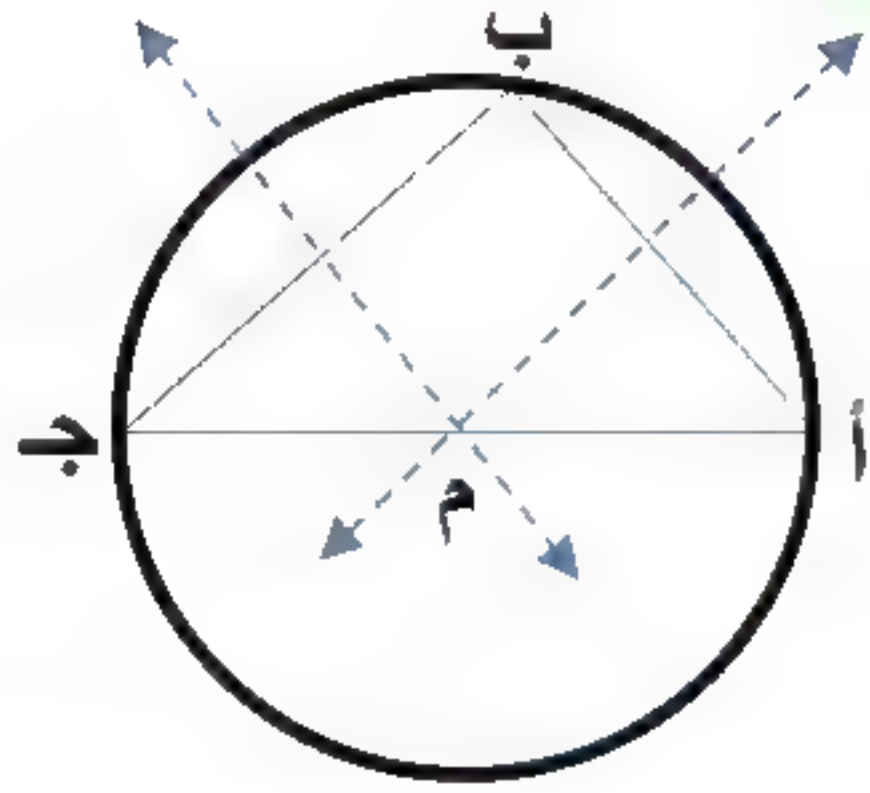
❖ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس كل من : المستطيل - المربع - شبه المنحرف المتساوي الساقين

❖ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس : متوازي الأضلاع - المعين - شبه المنحرف غير المتساوي الساقين

مثال ٢

باستخدام الأدوات ارسم المثلث أ ب ج القائم حيث
 أ ب = ٣ سم ، ب ج = ٤ سم ثم ارسم دائرة تمر
 برؤوس المثلث ثم أوجد طول نصف قطرها

الحل

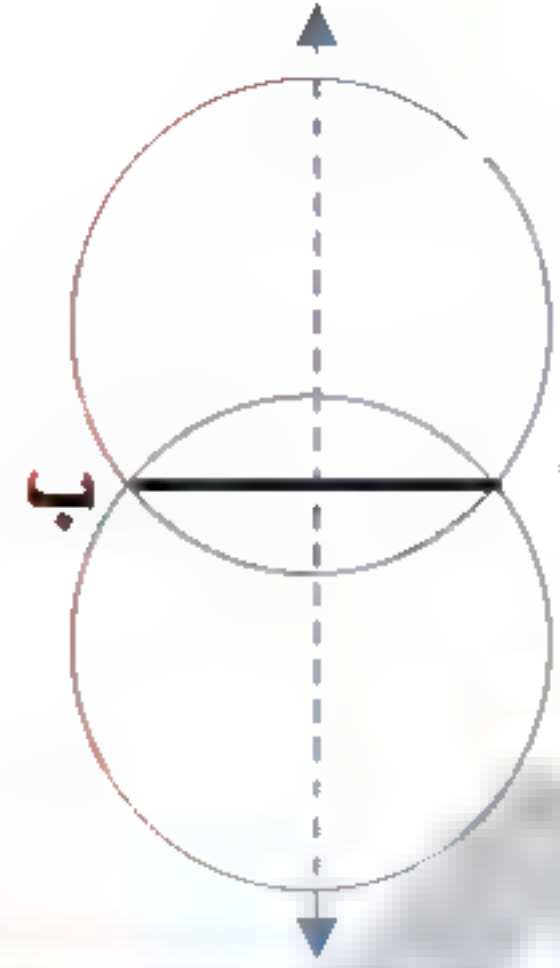


من فيثاغورث
 أ ج = ٥ سم
 ∴ المركز م ينصف وتر المثلث
 ∴ نق = ٢,٥ سم

مثال ١

باستخدام الأدوات الهندسية ارسم أ ب = ٦ سم
 ثم ارسم دائرة قطرها ١٠ سم تمر بالنقطتين أ ، ب
 وكم دائرة يمكن رسمها

الحل



نق = ٥ سم
 $\frac{1}{2}$ أ ب = ٣ سم
 نق < $\frac{1}{2}$ أ ب
 عدد الحلول دائرتان

5

تمارين

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٢ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس

- (أ) المثلث (ب) المربع (ج) المعين (د) المستطيل

٣ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس

- (أ) معين (ب) مستطيل (ج) شبه منحرف (د) متوازي أضلاع

٤ مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع

- (أ) متوسطات المثلث (ب) ارتفاعات المثلث (ج) محاور تماثل أضلاعه (د) منصفات زواياه الداخلة

٥ مركز الدائرة الخارجة لأي مثلث هو نقطة تقاطع

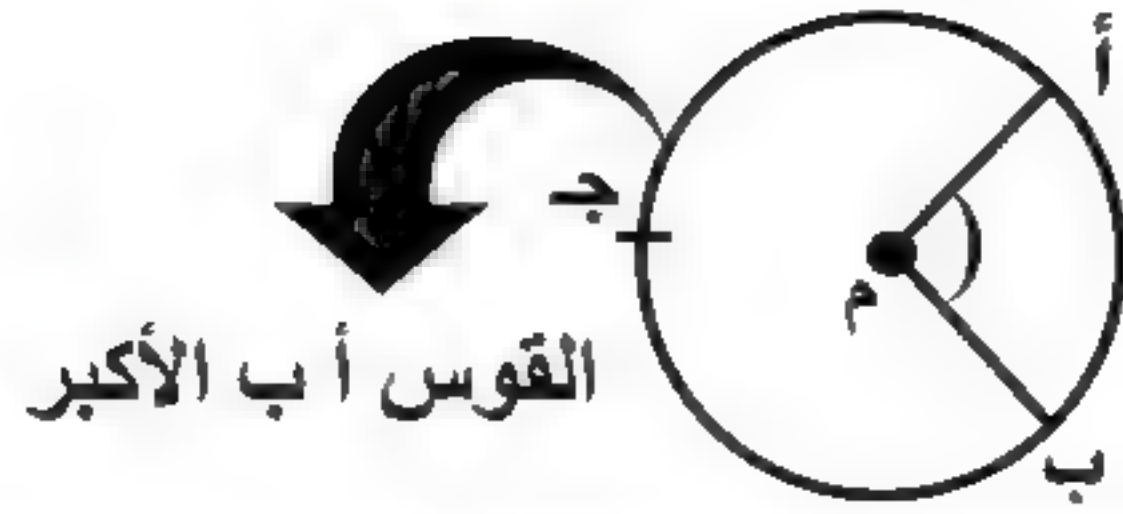
- (أ) متوسطات المثلث (ب) ارتفاعات المثلث (ج) محاور تماثل أضلاعه (د) منصفات زواياه الداخلة

١ ارسم القطعة أ ب = ٤ سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤ سم تمر بالنقطتين أ ، ب

٢ ارسم Δ أ ب ج المتساوي الأضلاع طول ضلعه ٤ سم ثم ارسم دائرة تمر برؤوسه ثم حدد موضع الدائرة بالنسبة لارتفاعاته.

هي زاوية رأسها مركز الدائرة ويحمل ضلعيها أنصاف أقطار

الزاوية المركزية

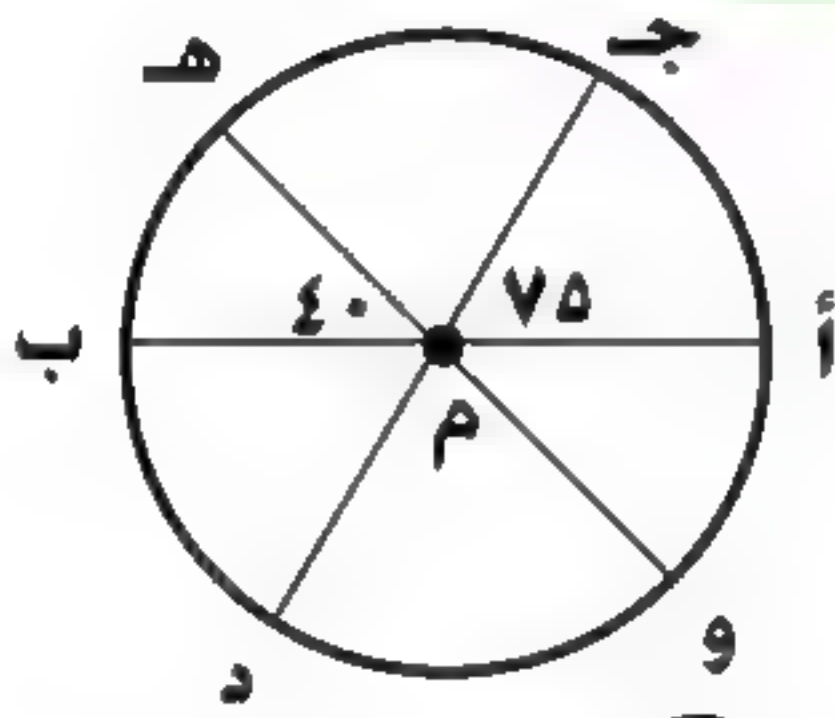


- أ م ب زاوية مركزية
- القوس المقابل لها هو القوس \widehat{AB}
- القوس \widehat{AB} يسمى \widehat{AB} الأكبر

قياس القوس يساوى قياس الزاوية المركزية المقابلة له

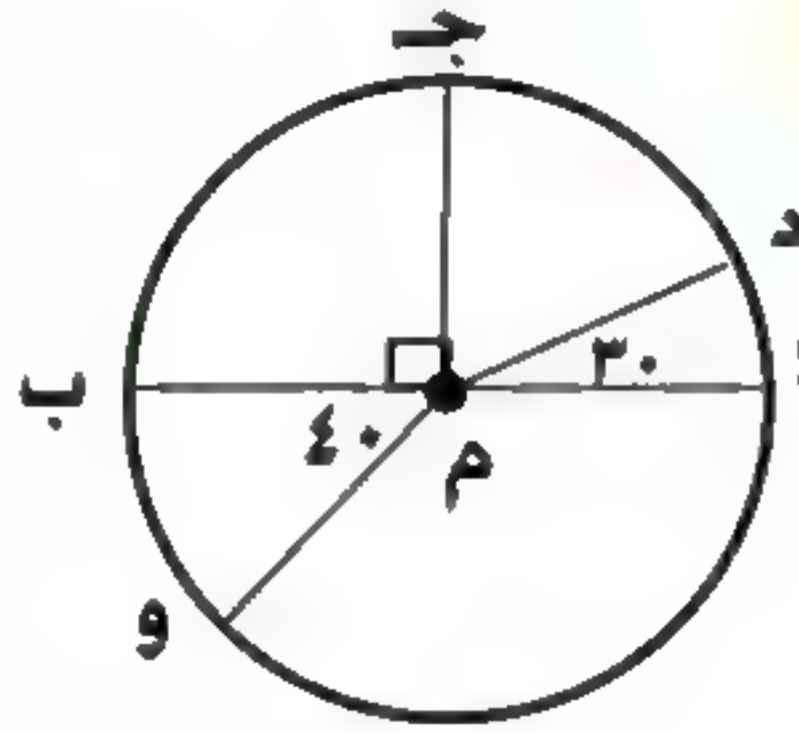
قياس القوس

تدريب



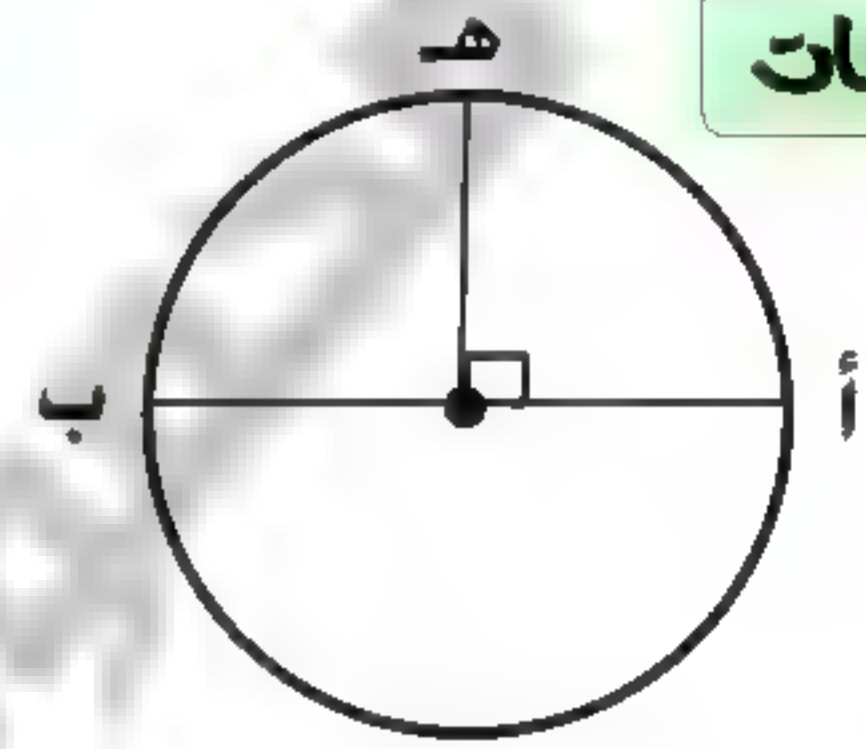
$$\begin{aligned} \text{ق (أ ج)} &= \dots\dots\dots \\ \text{ق (ج هـ)} &= \dots\dots\dots \\ \text{ق (أ ج د)} &= \dots\dots\dots \\ \text{ق (أ و هـ)} &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

مثال



$$\begin{aligned} \text{ق (أ د)} &= 30^\circ \quad \text{ق (ج ب)} = 90^\circ \\ \text{ق (د ج)} &= 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ \\ \text{ق (د ج ب)} &= 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ \\ \text{ق (أ ب و)} &= 40^\circ + 180^\circ = 220^\circ \end{aligned}$$

ملاحظات



- ◆ قياس الدائرة كلها = 360°
- ◆ قياس نصف الدائرة = 180°
- ◆ قياس ربع الدائرة = 90°
- ◆ قياس خمس الدائرة = $\frac{360}{5} = 72^\circ$

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi \text{ نق}$$

طول القوس

تدريب

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{3}$ الدائرة .
ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف
قطر الدائرة ٧ سم .

الحل

مثال

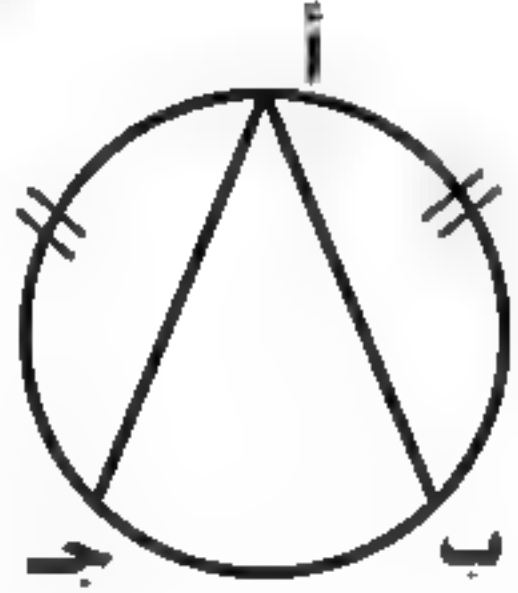
أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{3}$ الدائرة .
ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف
قطر الدائرة ٧ سم .

الحل

$$\begin{aligned} \text{قياس القوس الذى يمثل } \frac{1}{3} \text{ الدائرة} &= \frac{360}{3} = 120^\circ \\ \text{طول القوس} &= \frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi \text{ نق} \\ &= \frac{120}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 14.6 \text{ سم} \end{aligned}$$

تصميم
محمود عوض
معلم رياضيات

٢ إذا كانت الأقواس متساوية
فإن أوتارها تكون متساوية



إذا كان ق (أب) = ق (أج)
فإن : أب = أج

مثال



ق (أب) = ق (أج)
ق (أ) = ٧٠
فأوجد ق (ب)

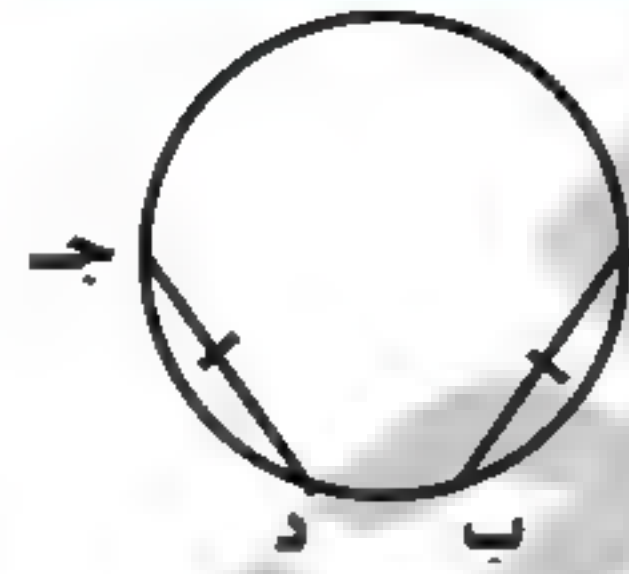
الحل

∴ ق (أب) = ق (أج) ∴ أقواس متساوية

∴ أب = أج ∴ أوتار متساوية

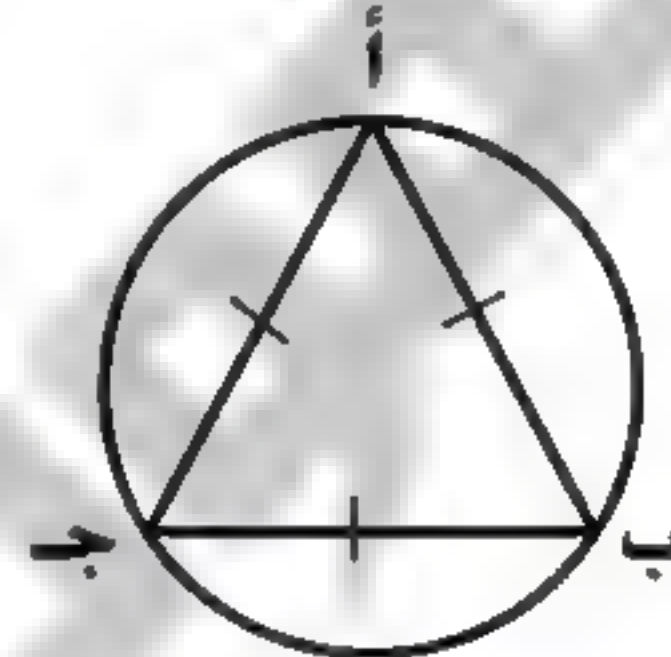
$$\therefore \text{ق (ب)} = \text{ق (ج)} = \frac{180 - 70}{2} = \frac{110}{2} = 55^\circ$$

١ إذا كانت الأوتار متساوية
فإن أقواسها تكون متساوية



إذا كان أب = جد
فإن : ق (أب) = ق (جد)

مثال



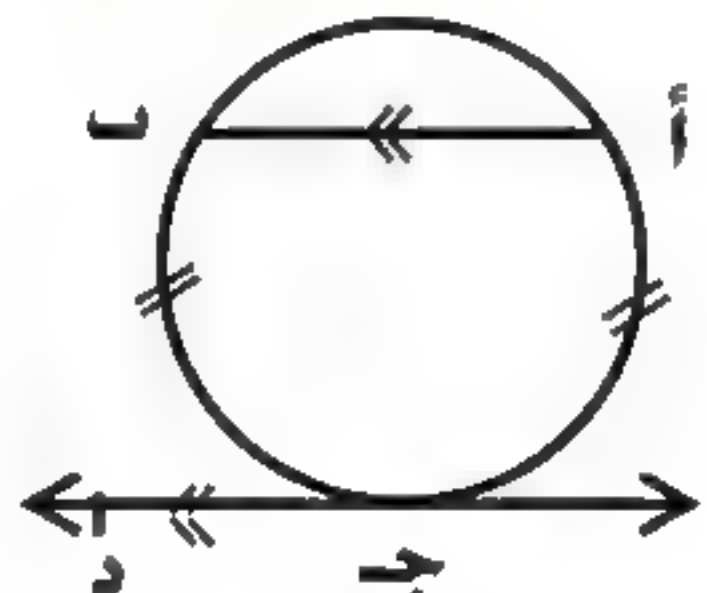
أب جد ∆ متساوي الأضلاع
أوجد ق (أب)

الحل

∴ أب = جد = أج ∴ أوتار متساوية
∴ ق (أب) = ق (بج) = ق (أج) ∴ أقواس متساوية

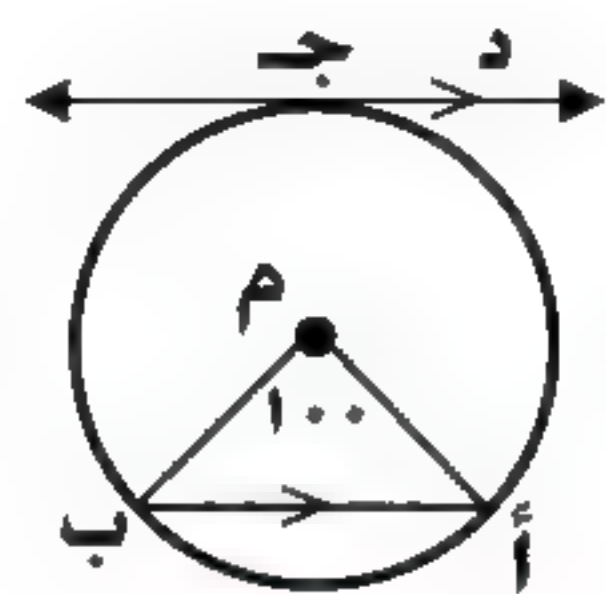
$$\therefore \text{ق (أب)} = \frac{360}{3} = 120^\circ$$

٤ الوتر والمماس المتوازيان
يحصران قوسان متساويان



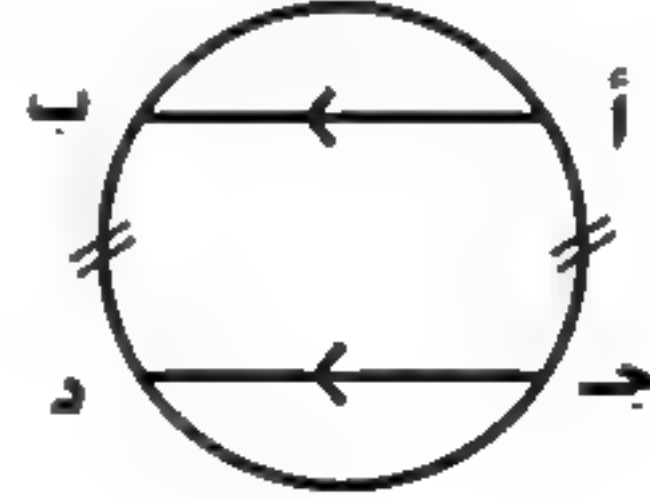
إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
فإن ق (أج) = ق (بج)

تدريب



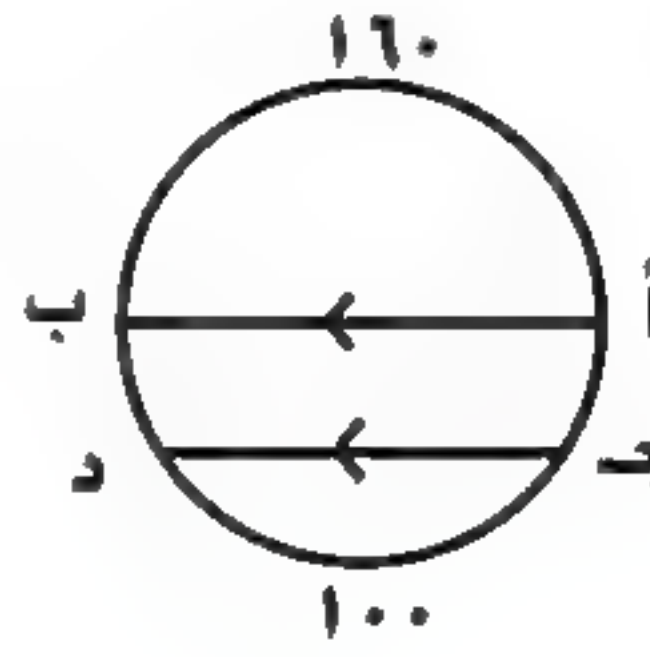
إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
ق (أب) = ١٠٠
فإن ق (أج) =

٣ الوتران المتوازيان
يحصران قوسان متساويان



إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
فإن ق (أج) = ق (بج)

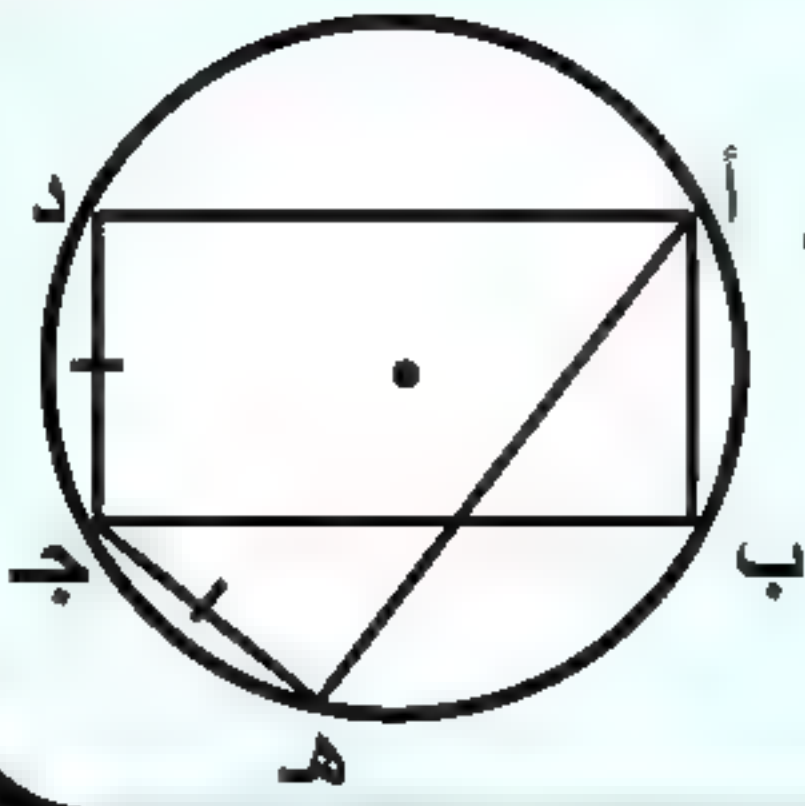
تدريب



إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
ق (أب) = ١٦٠
ق (جد) = ١٠٠
فإن ق (أج) =

٥ في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية في الطول متساوية في القياس

٢



أ ب ج د مستطيل مرسوم داخل
دائرة
ج ه = ج د
اثبت أن : أ ه = ب ج

الحل

∴ أ ب = ج د خواص المستطيل

ه ج = ج د (معطى)

∴ أ ب = ه ج

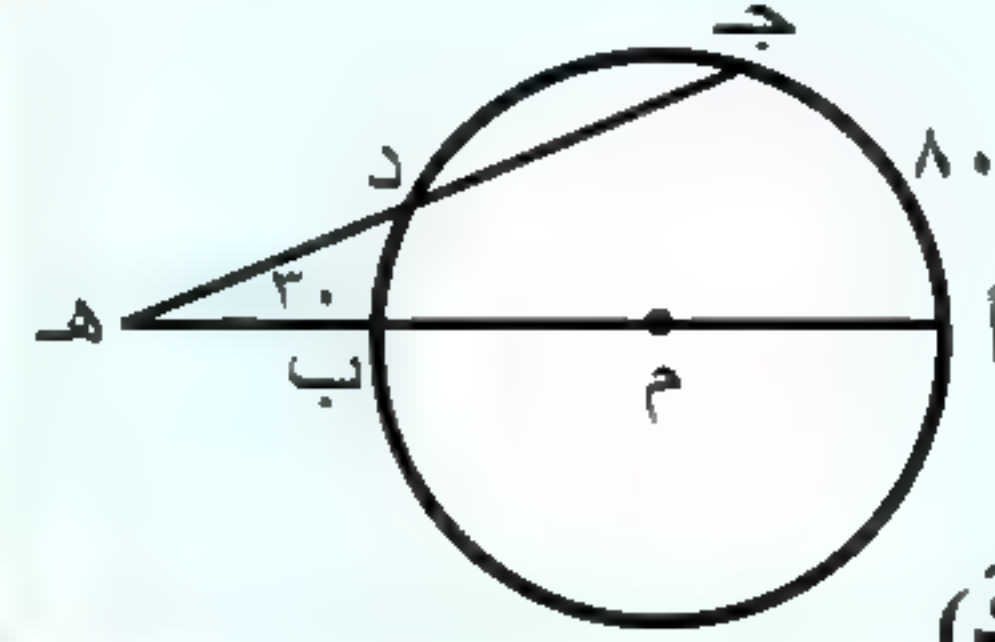
∴ ق (أ ب) = ق (ه ج)

بإضافة ق (ب ه) للطرفين

∴ ق (أ ه) = ق (ب ج)

∴ أ ه = ب ج ه طث

١

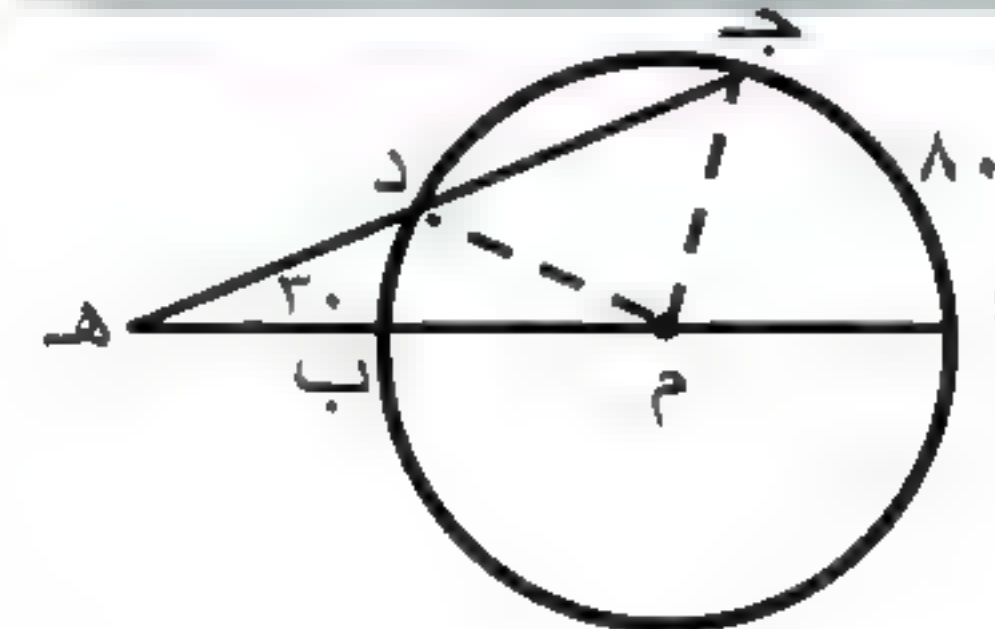


أ ب قطر فى الدائرة م
ق (أ ه ج) = ٣٠°
ق (أ ج د) = ٨٠°
أوجد ق (ج د)

الحل

العمل :

نرسم م ج د ، م د



∴ ق (أ ج د) = ٨٠° ∴ ق (أ م ج) = ٨٠°

∴ أ م ج زاوية خارجة عن ∆ ج م ه

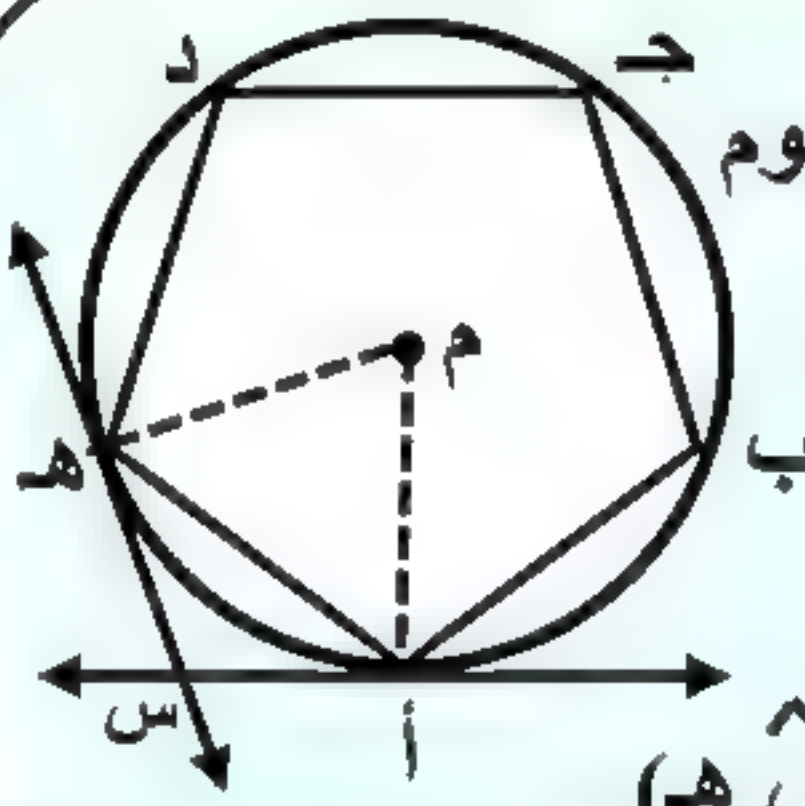
∴ ق (م ج ه) = ٨٠° - ٣٠° = ٥٠°

فى ∆ ج م د : ∴ م ج = م د (أنصاف أقطار)

∴ ق (ج م د) = ١٨٠° - (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠°

∴ ق (ج د) = ٨٠°

٤



أ ب ج د ه خماسى منتظم مرسوم
داخل الدائرة م
أ س مماس للدائرة عند أ
ه س مماس للدائرة عند ه
أوجد : ١- ق (أ ه) ٢- ق (أ س ه)

الحل

العمل : نرسم م أ ، م ه

∴ أ ب ج د ه خماسى منتظم

∴ أ ب = ب ج = ج د = د ه = ه أ

∴ ق (أ ب) = ق (ب ج) = ق (ج د) = ق (د ه) = ق (ه أ)

∴ قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ ق (أ ه) = ٣٦٠° / ٥ = ٧٢° أولا

∴ ق (أ ه) = ٧٢° ∴ ق (أ م ه) = ٧٢°

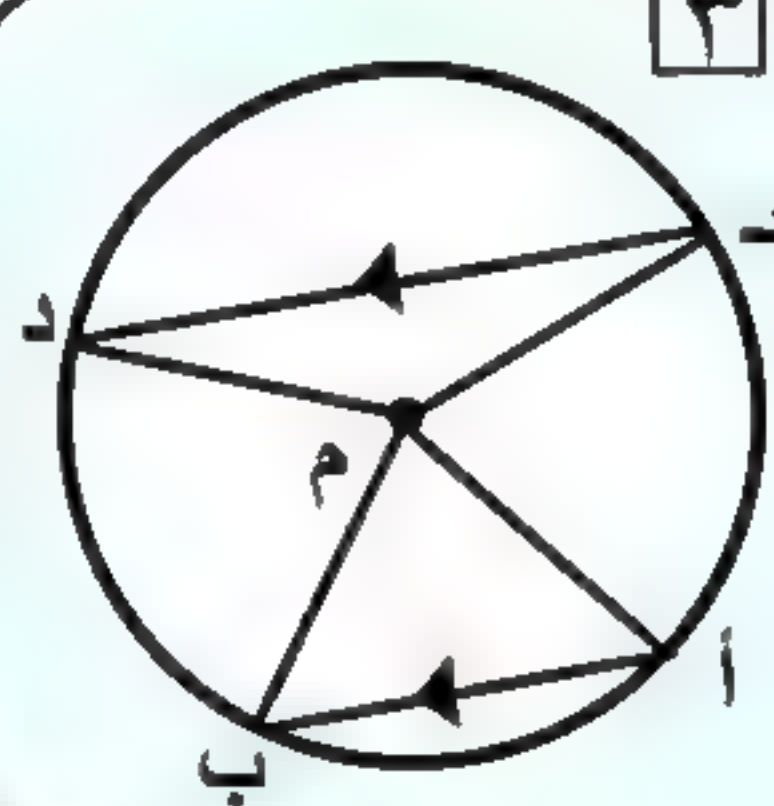
∴ أ س مماس ∴ ق (م أ س) = ٩٠°

∴ ه س مماس ∴ ق (م ه س) = ٩٠°

فى الشكل الرباعى م أ س ه :

ق (أ س ه) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ٧٢°) = ١٠٨°

٣



م دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم
أ ب ، ج د وتران متوازيان
ق (أ ج د) = ٨٠°
طول (أ ج د) = طول (أ ب)
أوجد : ١- ق (م أ ب) ٢- ق (ج د) ٣- طول (ج د)

الحل

∴ طول (أ ج د) = طول (أ ب)

∴ ق (أ ج د) = ق (أ ب) = ٨٠°

∴ ق (أ م ب) المركزية = ٨٠°

∴ م أ = م ب (أنصاف أقطار) ∴ ∆ م أ ب متساوى الساقين

∴ ق (م أ ب) = ق (م ب أ) = ٥٠° المطلوب الأول

∴ أ ب // ج د ∴ ق (أ ج د) = ق (ب د) = ٨٠°

∴ ق (ج د) + ق (أ ج د) + ق (أ ب) + ق (ب د) = ٣٦٠°

∴ ق (ج د) = ٣٦٠° - (٨٠° + ٨٠° + ٨٠°) = ١٢٠°

طول ج د = ١٢٠ / ٣٦٠ × ١٥ × ٢ = ٣١,٤ سم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 قياس القوس الذي يمثل ثلث قياس الدائرة =

- (أ) ٣٦٠ (ب) ١٨٠ (ج) ١٢٠ (د) ٩٠

2 طول نصف الدائرة التي طول نصف قطرها نق سم = سم

- (أ) 2π نق (ب) $\frac{1}{4}\pi$ نق (ج) $\frac{1}{3}\pi$ نق (د) π نق

3 قياس الزاوية المركزية المرسومة في $\frac{1}{3}$ دائرة =

- (أ) ٢٤٠ (ب) ١٢٠ (ج) ٦٠ (د) ٣٠

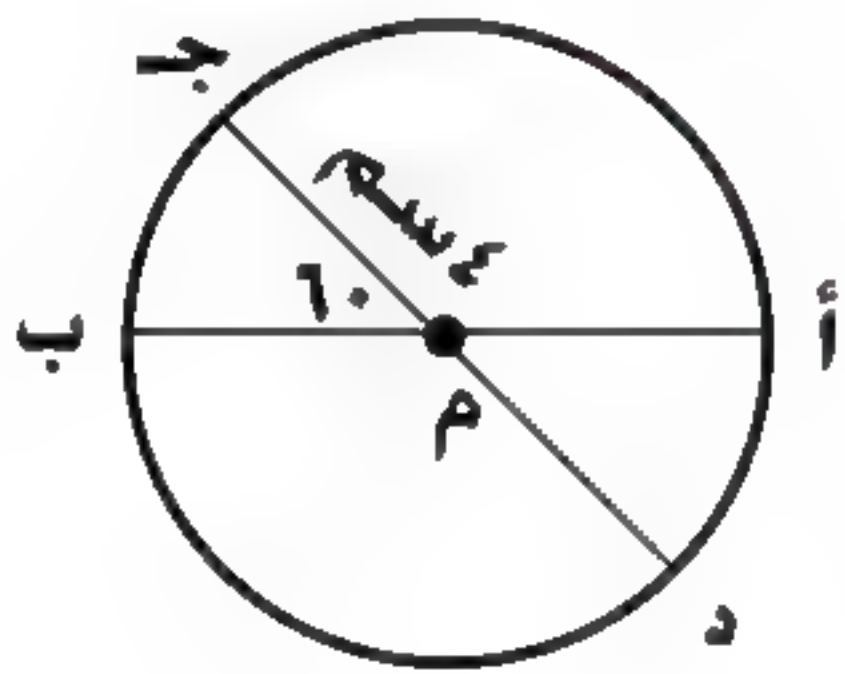
4 قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوسا طوله $\frac{1}{3}\pi$ نق =

- (أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (ج) ١٢٠ (د) ٢٤٠

5 في الشكل المقابل : م دائرة ، م ج د = ٤ سم

ق (ج م ب) = ٦٠° فإن طول ب د =

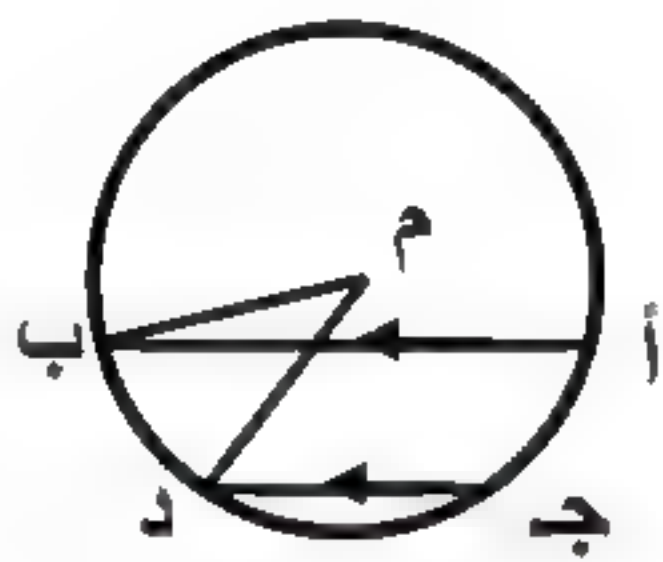
- (أ) $\pi 4$ (ب) $\pi 8$ (ج) $\pi \frac{8}{3}$ (د) $\pi 16$



6 في الشكل المقابل : م دائرة ، أ ب // ج د

ق (أ ج) = ٣٠° فإن ق (ب م د) =

- (أ) ١٠° (ب) ١٥° (ج) ٣٠° (د) ٦٠°



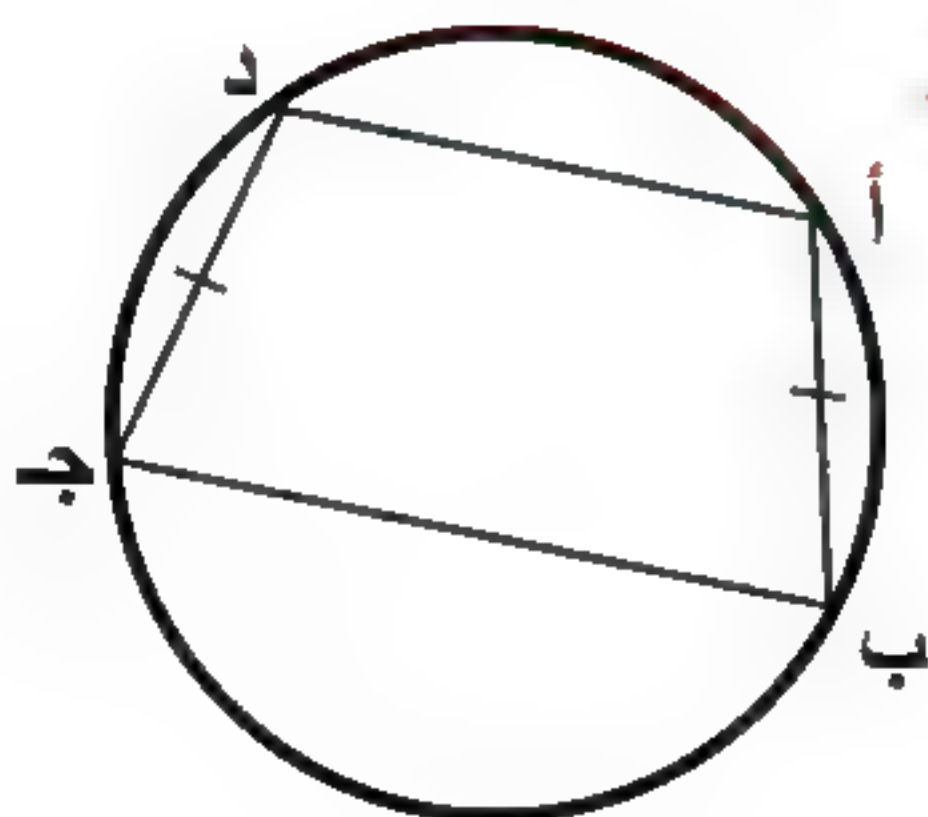
٣ في الشكل المقابل:

أ ب ج د شكل رباعي

أ ب = ج د

اثبت أن:

أ ج = ب د



١ أوجد قياس القوس الذي يمثل $\frac{1}{6}$ الدائرة .

ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٧ سم .

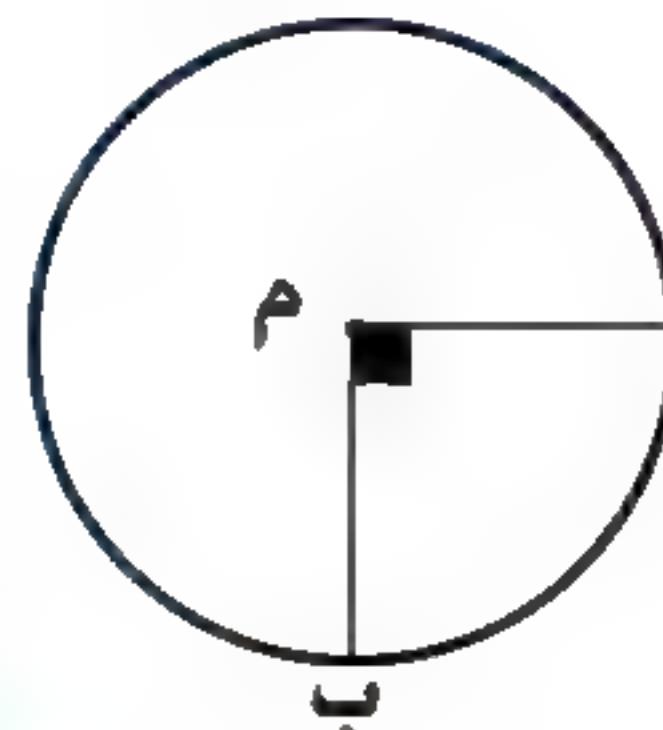
٢ في الشكل المقابل:

م دائرة ، ق (أ م ب) = ٩٠°

طول نصف قطرها = ٧ سم

أوجد طول أ ب

حيث $\frac{22}{7} = \pi$

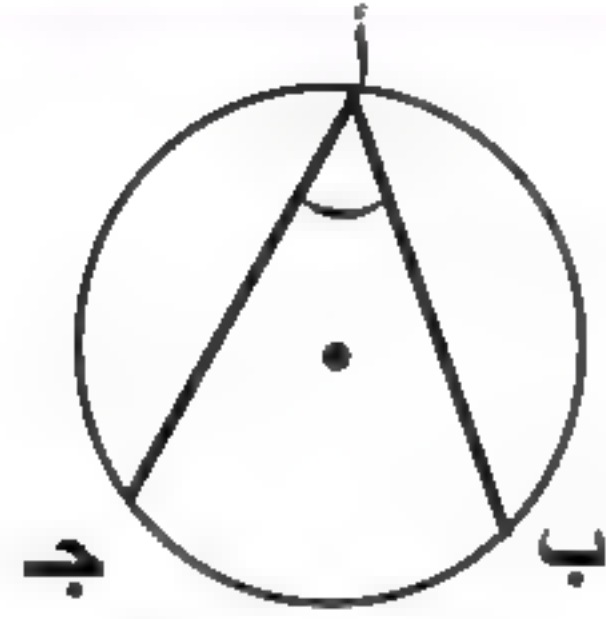


العلاقة بين المحيطية والمركزية

الدرس
الثاني 2

هي زاوية رأسها على الدائرة ويحمل ضلعيها وتران

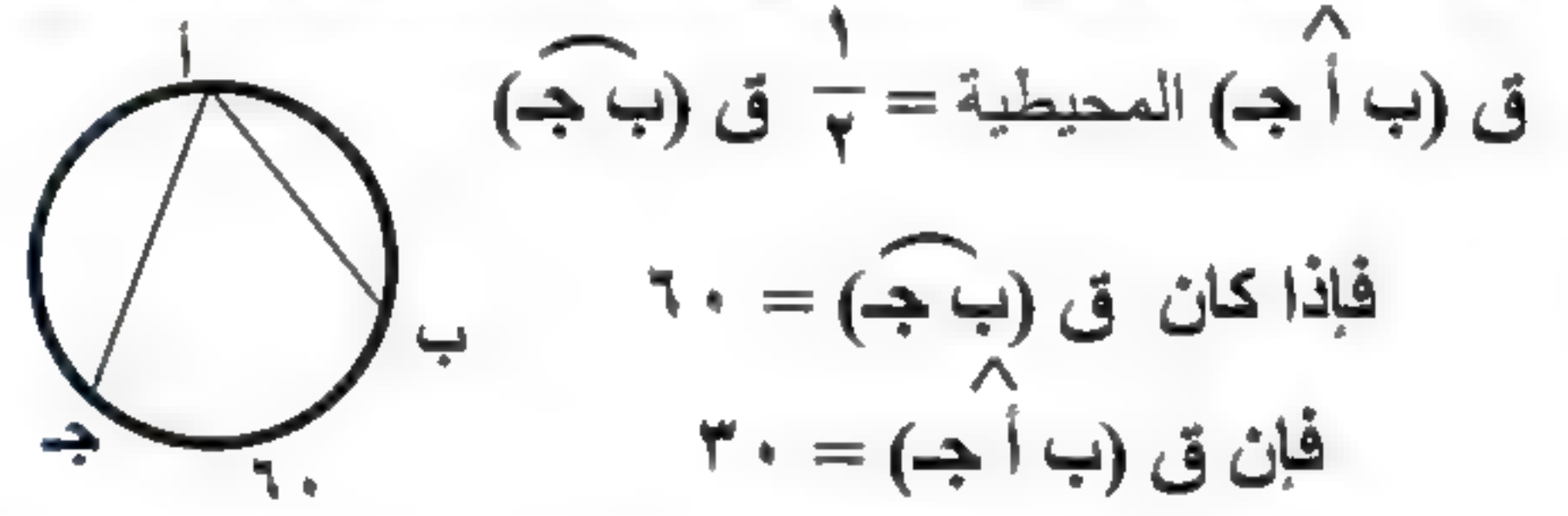
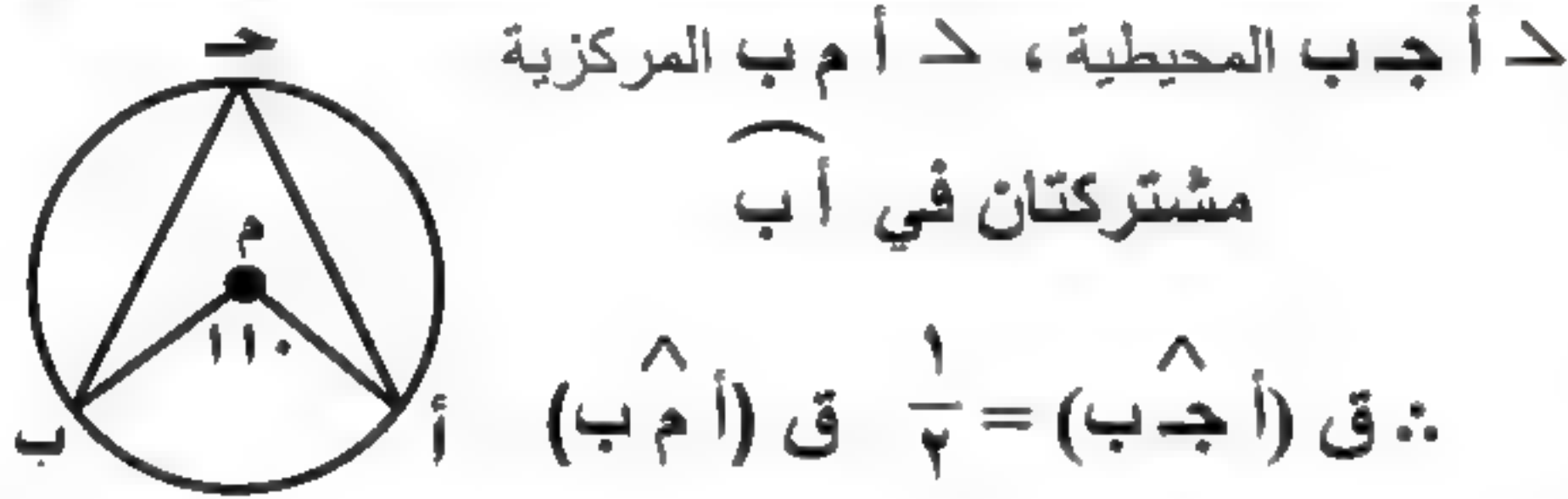
الزاوية المحيطية



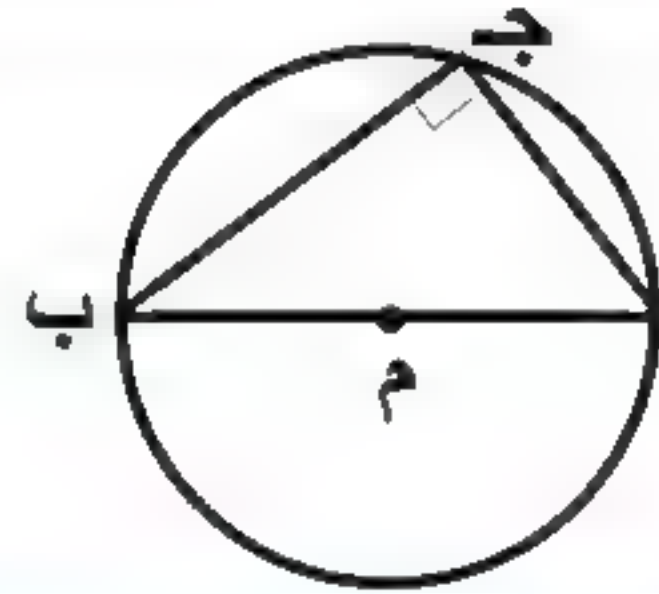
- ب أ ج زاوية محيطية
- القوس المقابل لها هو ب ج

قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس
المركزية المشتركة معها في القوس

قياس الزاوية المحيطية =
نصف قياس القوس المقابل لها



الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

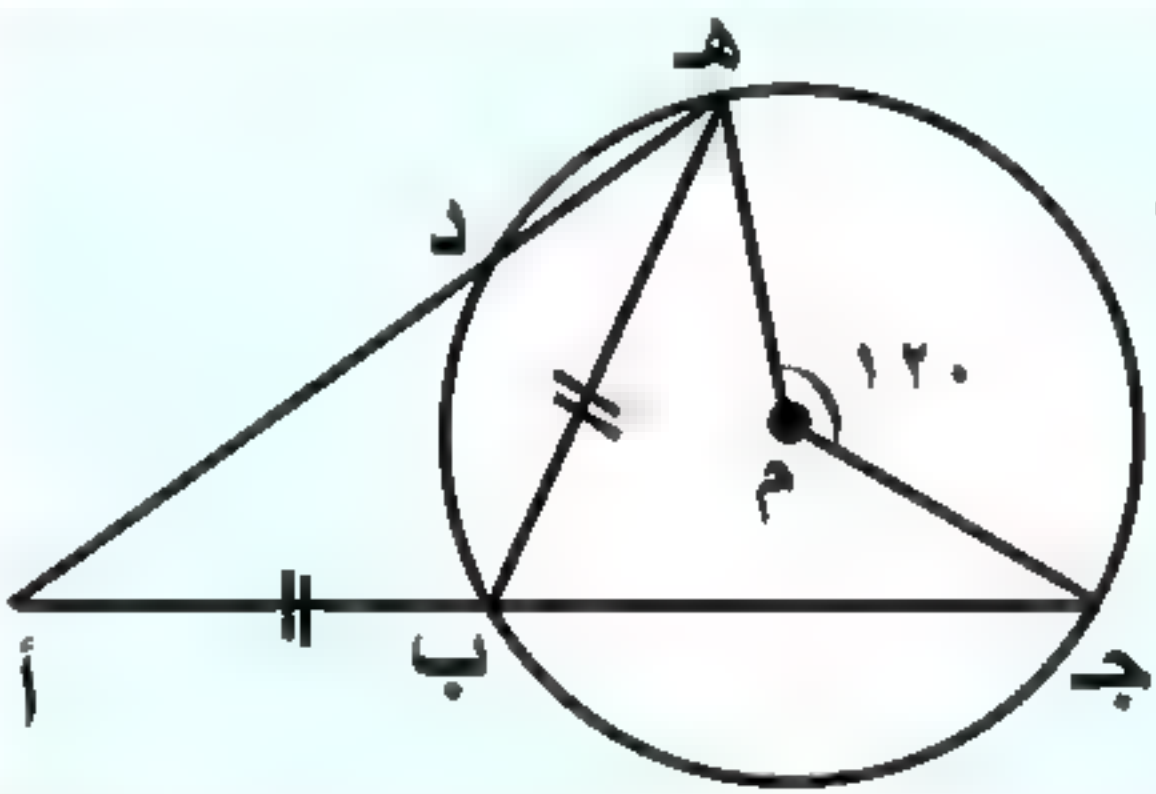


∴ أ ب قطر

∴ ق (ج) المحيطية = ٩٠°

لأنها محيطية القوس المقابل لها نصف دائرة أ

مثال ٢



ق (هـ م ج) = ١٢٠°

أ ب = ب هـ

أوجد: ق (د أ ج)

الحل

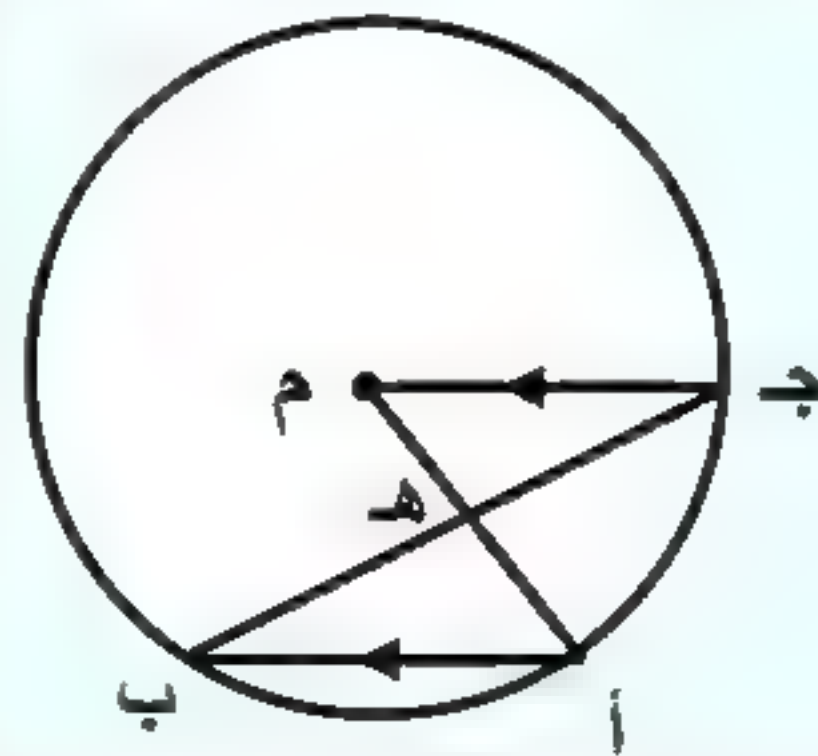
∴ ق (هـ ب ج) المحيطية = ١/٢ ق (م) المركزية

لأنهما مشتركتان في أ ج ∴ ق (هـ ب ج) = ٦٠°

∴ أ ب = ب هـ

∴ ق (ب هـ أ) = ق (هـ أ ب) = ٦٠/٢ = ٣٠°

مثال ١



أ ب وتر في الدائرة م

ج م // أ ب

اثبت أن: ب هـ < أ هـ

الحل

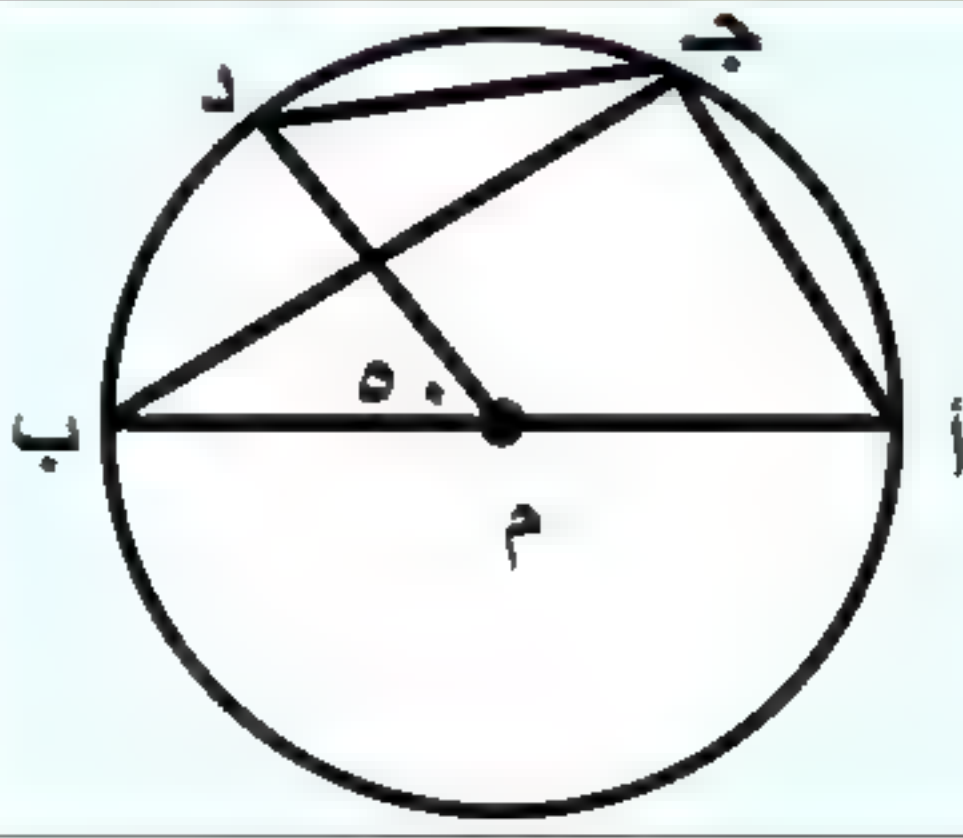
∴ ق (م) = ٢ ق (ب)

مركزية ومحيطية مشتركتان في أ ج

∴ ج م // أ ب ∴ ق (م) = ق (أ) بالتبادل

في Δ أ هـ ب: ∴ ق (أ) = ٢ ق (ب)

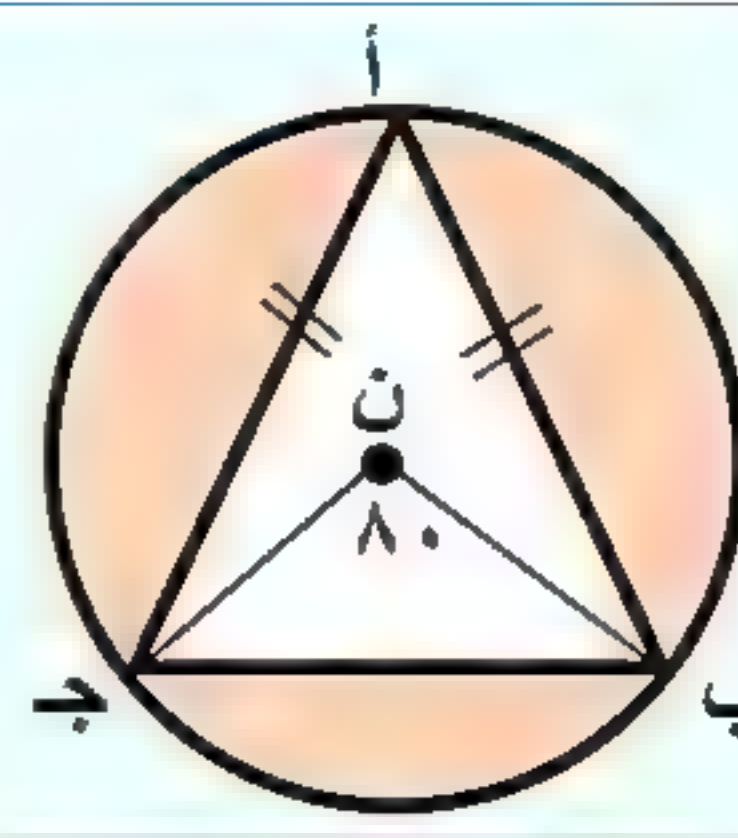
∴ ق (أ) < ق (ب) ∴ ب هـ < أ هـ



مثال ٤

أب قطر في الدائرة م
ق (د م ب) = 50°
أوجد ق (أ ج د)

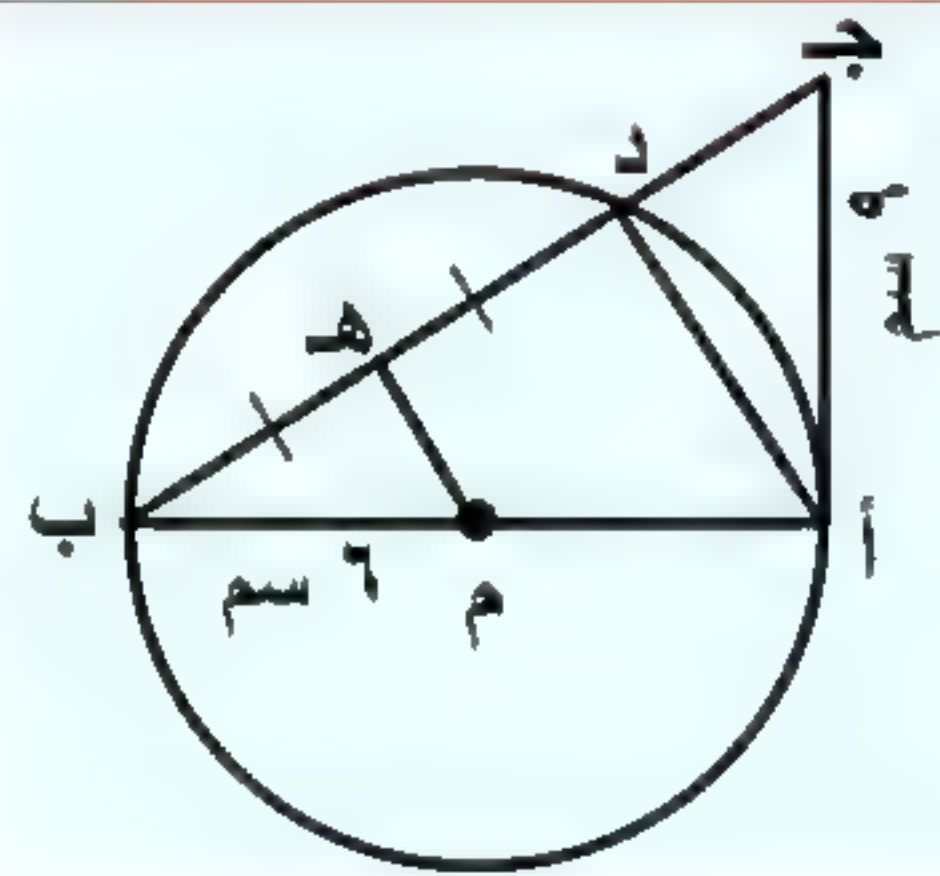
الحل



مثال ٣

أب = أ ج ،
ق (ب ن ج) = 80°
أوجد: (١) ق (أ ب ج)
(٢) ق (ب ج) الأكبر

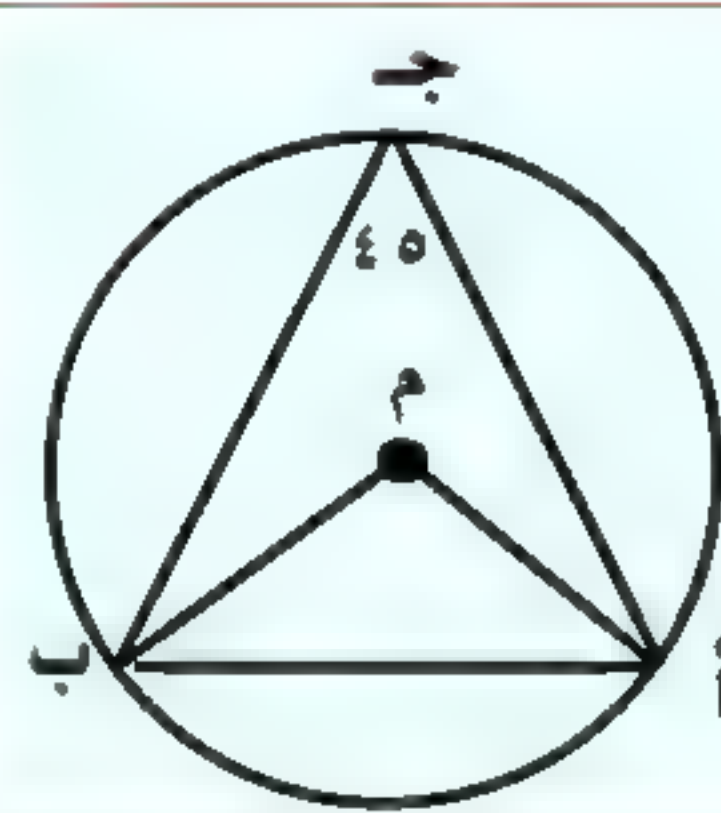
الحل



تدريب ٢

أب قطر ، أ ج مماس
هـ منتصف د ب
م ب = ٦ سم ، أ ج = ٩ سم
أوجد طول كل من :
ب ج ، أ د ، م هـ

الحل



تدريب ١

ق (ج) = 45°
أوجد ق (م أ ب)

الحل

تمارين

١ النسبة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس =

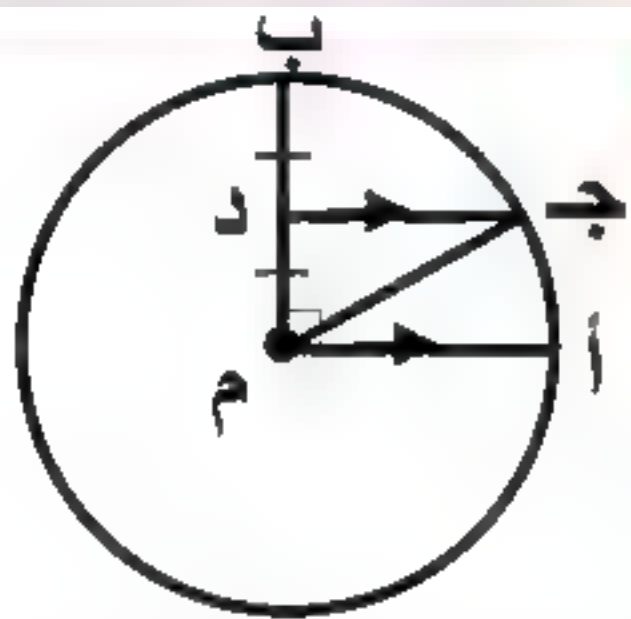
(أ) ٢ : ١ (ب) ٣ : ١ (ج) ١ : ٢ (د) ١ : ٣

٢ قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة =

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٨٠°

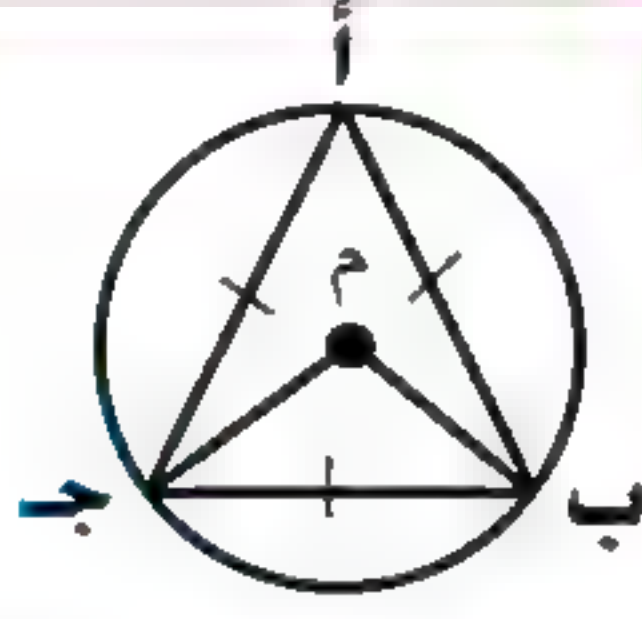
٣ الزاوية المحيطية التي تقابل قوساً أصغر في الدائرة تكون

(أ) منعكسة (ب) قائمة (ج) منفرجة (د) حادة



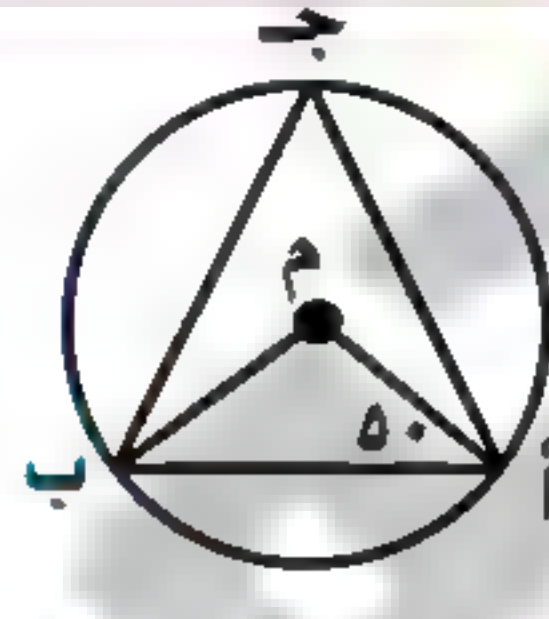
7

أم // جـ د ، ب د = د م
فإن ق (أ ج) =



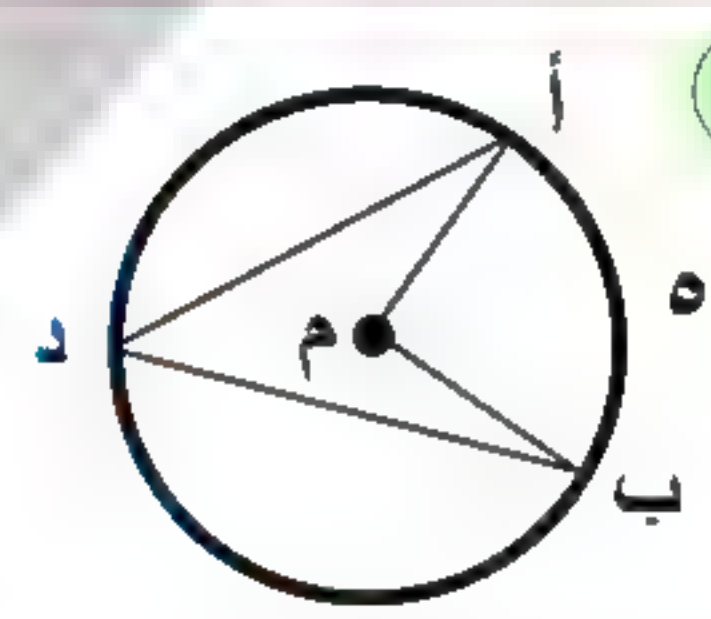
6

أ ب جـ Δ متساوي الأضلاع
فإن ق (ب م ج) =



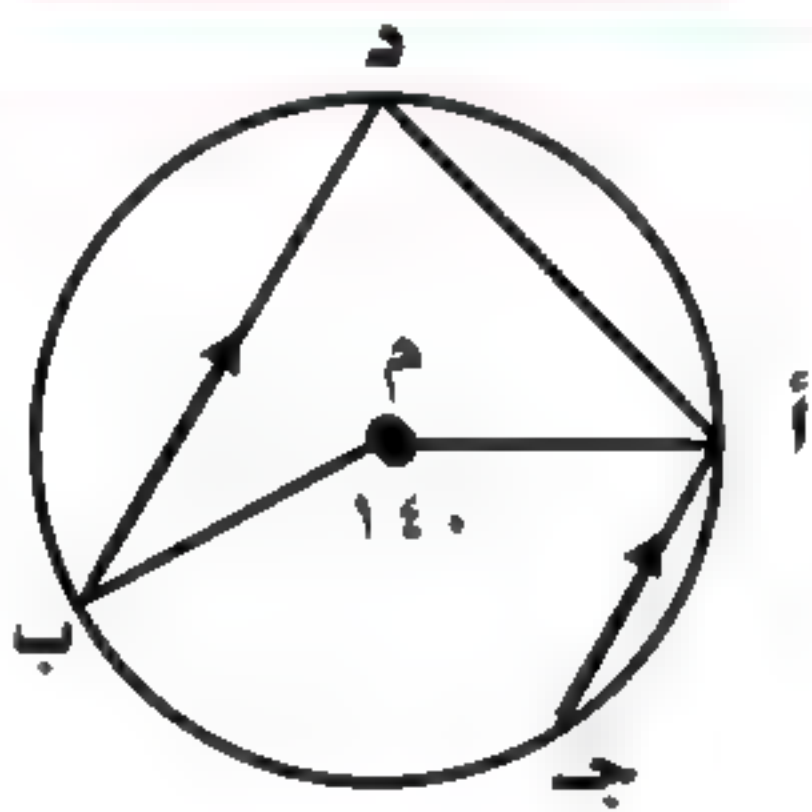
5

إذا كان ق (م أ ب) = ٥٠
فإن ق (ج) =



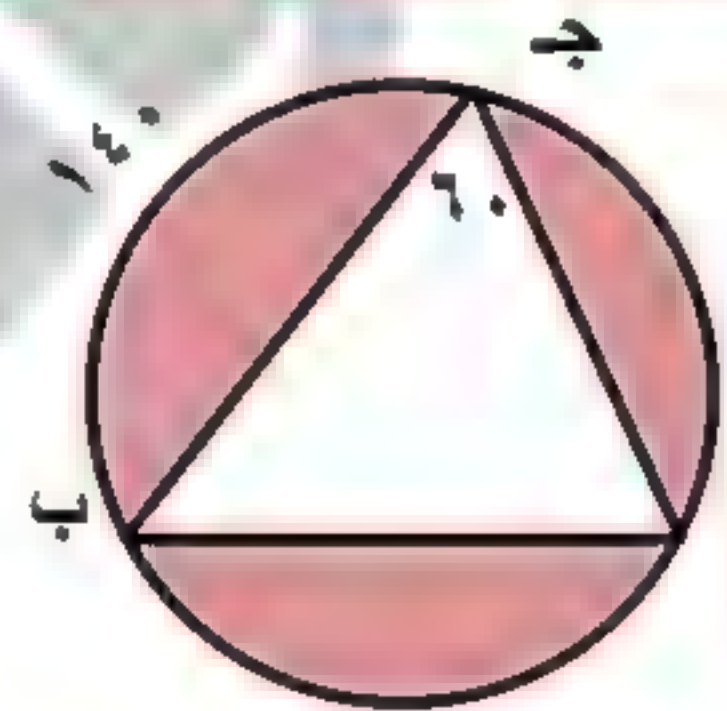
4

إذا كان ق (أ ب) = ٥٠
فإن ق (أ د ب) =



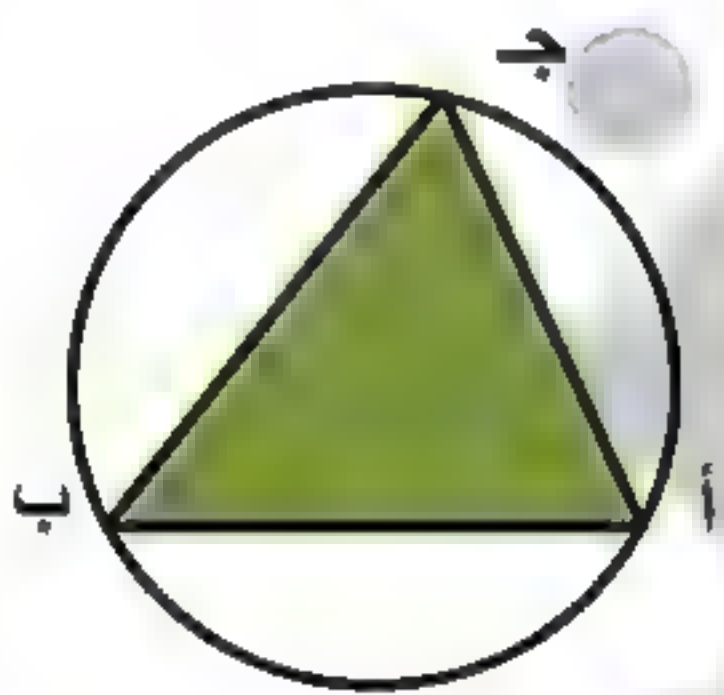
4

أ جـ // د ب
ق (أ م ب) = ١٤٠
أوجد ق (ج أ د)



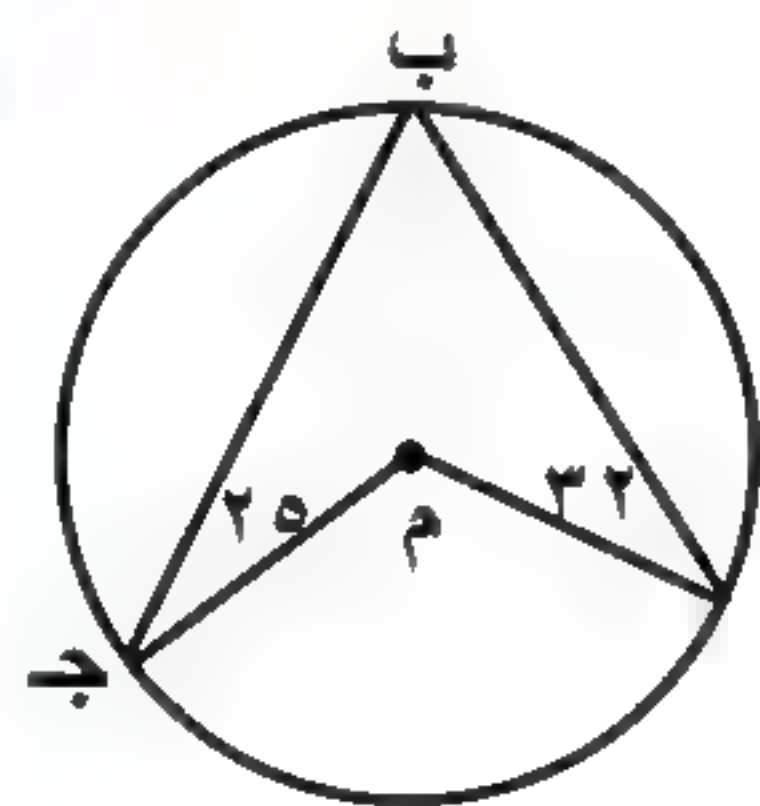
1

ق (ج) = ٦٠
ق (ج ب) = ١٤٠
أوجد ق (أ ج)



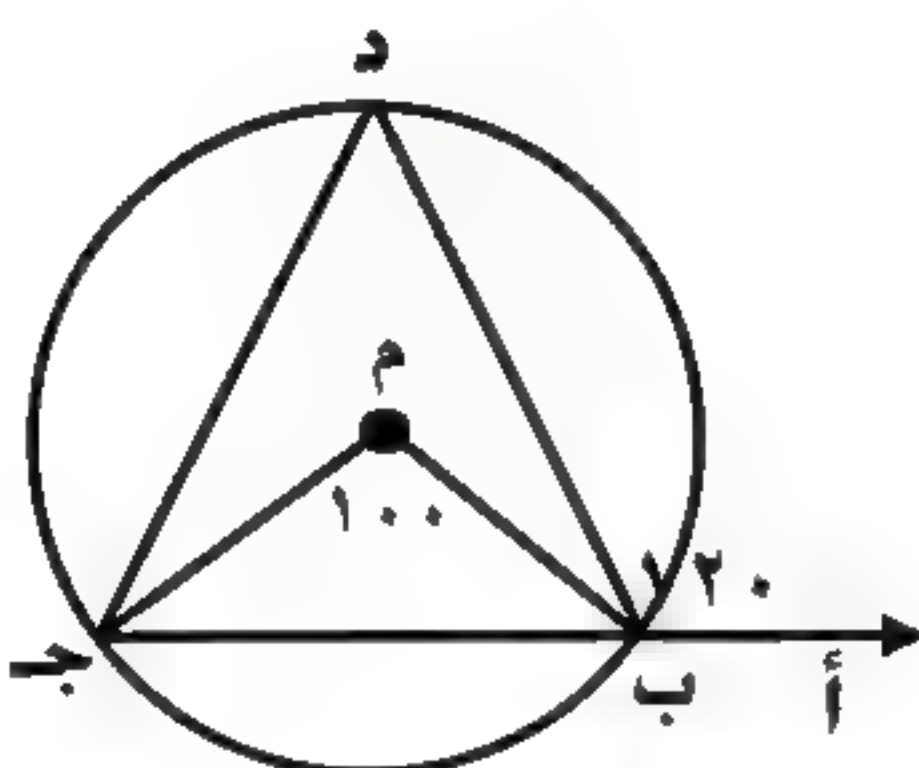
5

ق (أ ب) : ق (ب ج) : ق (أ ج) =
٣ : ٥ : ٤
أوجد : ق (أ ج ب)



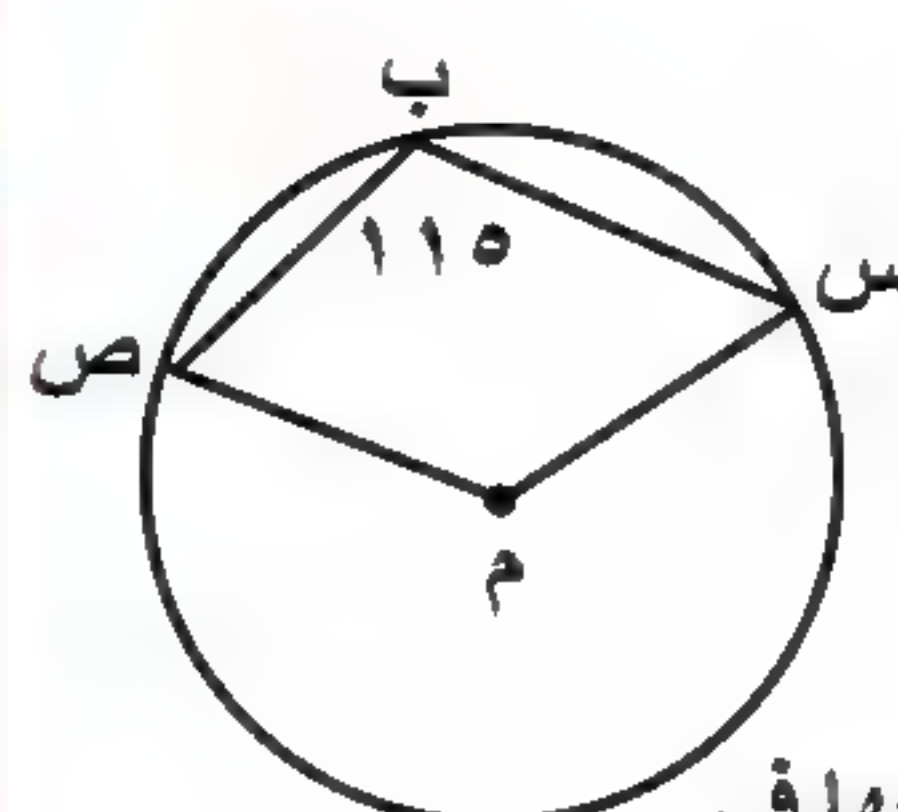
2

ق (أ) = ٣٢
ق (ج) = ٢٥
أوجد : ق (أ م ج)



6

ق (ب م ج) = ١٠٠
ق (أ ب د) = ١٢٠
أوجد ق (د ج ب)

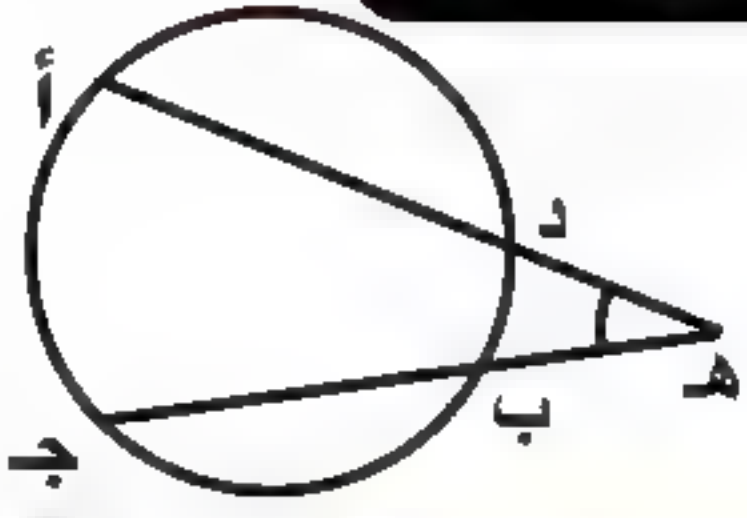


3

ق (ب) = ١١٥
أوجد : ق (س م ص)

خذ بالك : ب محيطية تشترك معها في القوس زاوية مركزية وهي م المنعكسة

تمرين مشهور ٢



لو تقاطع وتران خارج دائرة

قياس زاوية التقاطع = نصف الطرح

$$\widehat{C} = \frac{1}{2} [\widehat{A} - \widehat{B}]$$

قياس القوس الأكبر = ضعف الزاوية + الأصغر

$$\widehat{A} = 2\widehat{C} + \widehat{B}$$

قياس القوس الأصغر = الأكبر - ضعف الزاوية

$$\widehat{B} = \widehat{A} - 2\widehat{C}$$

تدريب 4



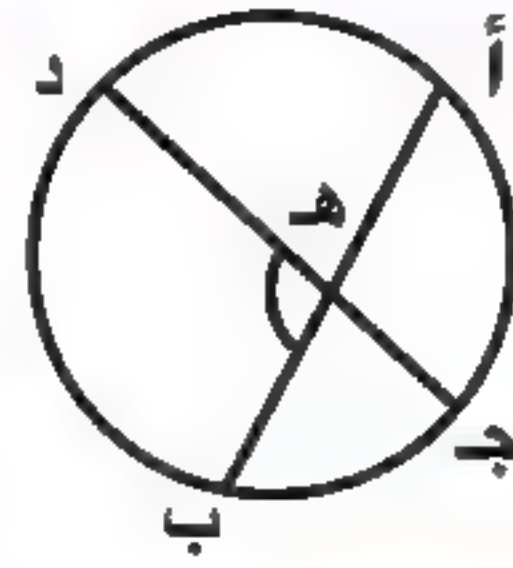
أوجد قيمة ص

تدريب 3



أوجد قيمة س

تمرين مشهور ١



لو تقاطع وتران داخل دائرة

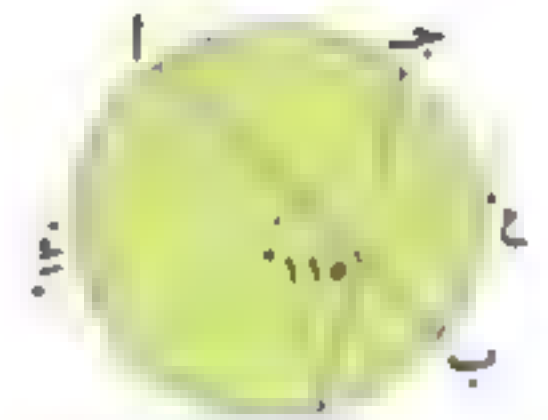
قياس زاوية التقاطع = نصف المجموع

$$\widehat{C} = \frac{1}{2} [\widehat{A} + \widehat{B}]$$

قياس القوس المجهول = ضعف الزاوية - المعلوم

$$\widehat{B} = \widehat{A} - 2\widehat{C}$$

تدريب 2



أوجد قيمة ع

تدريب 1



أوجد قيمة س

مثال ٢

في الشكل المقابل:

$$\widehat{A} = 30^\circ, \widehat{C} = 44^\circ$$

$$\widehat{D} = 48^\circ$$

أوجد: ١- \widehat{B} ٢- \widehat{C}

الحل

من تمرين مشهور ٢:

$$\widehat{B} = 2\widehat{C} - \widehat{A}$$

$$\therefore \widehat{B} = 2 \times 44 - 30 = 58^\circ$$

$$\therefore \widehat{D} = 48^\circ$$

$$\therefore \widehat{C} = 96^\circ$$

$$\therefore \text{قياس الدائرة} = 360^\circ$$

$$\therefore \widehat{A} = 360 - (96 + 58 + 48) = 158^\circ$$

مثال ١

في الشكل المقابل:

$$\widehat{A} = 110^\circ, \widehat{C} = 100^\circ$$

$$\widehat{D} = 110^\circ$$

$$\widehat{B} = 100^\circ$$

أوجد \widehat{C}

الحل

من تمرين مشهور ١:

$$\widehat{C} = 2\widehat{D} - \widehat{A}$$

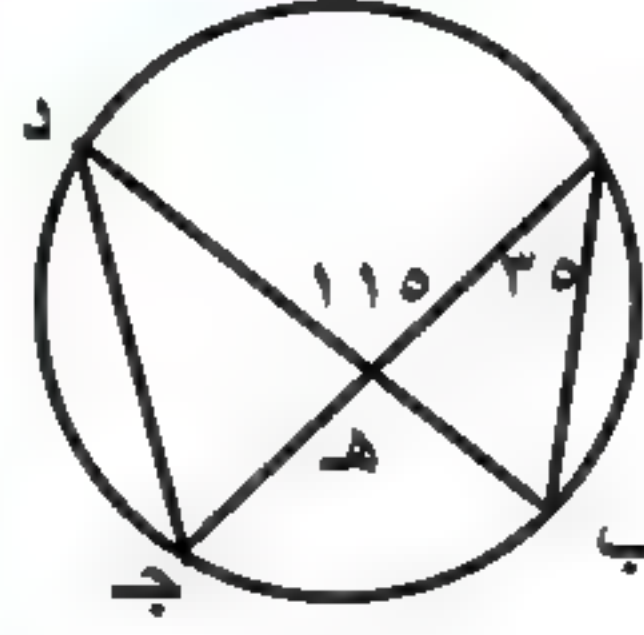
$$\therefore \widehat{C} = 2 \times 110 - 100 = 120^\circ$$

$$\therefore \widehat{C} = 120^\circ$$

$$\therefore \widehat{C} = 60^\circ$$

تمارين

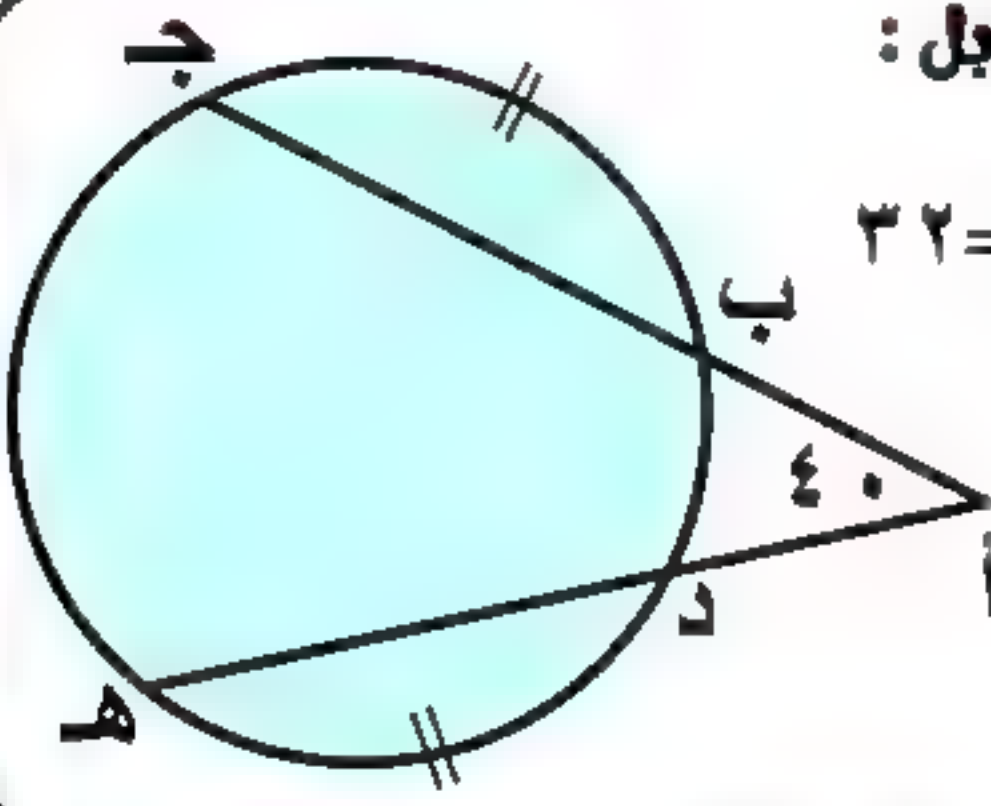
١ في الشكل المقابل :



ق (أ) = 35°
 ق (أهـ د) = 115°
 أوجد : ق (أ د)

الحل

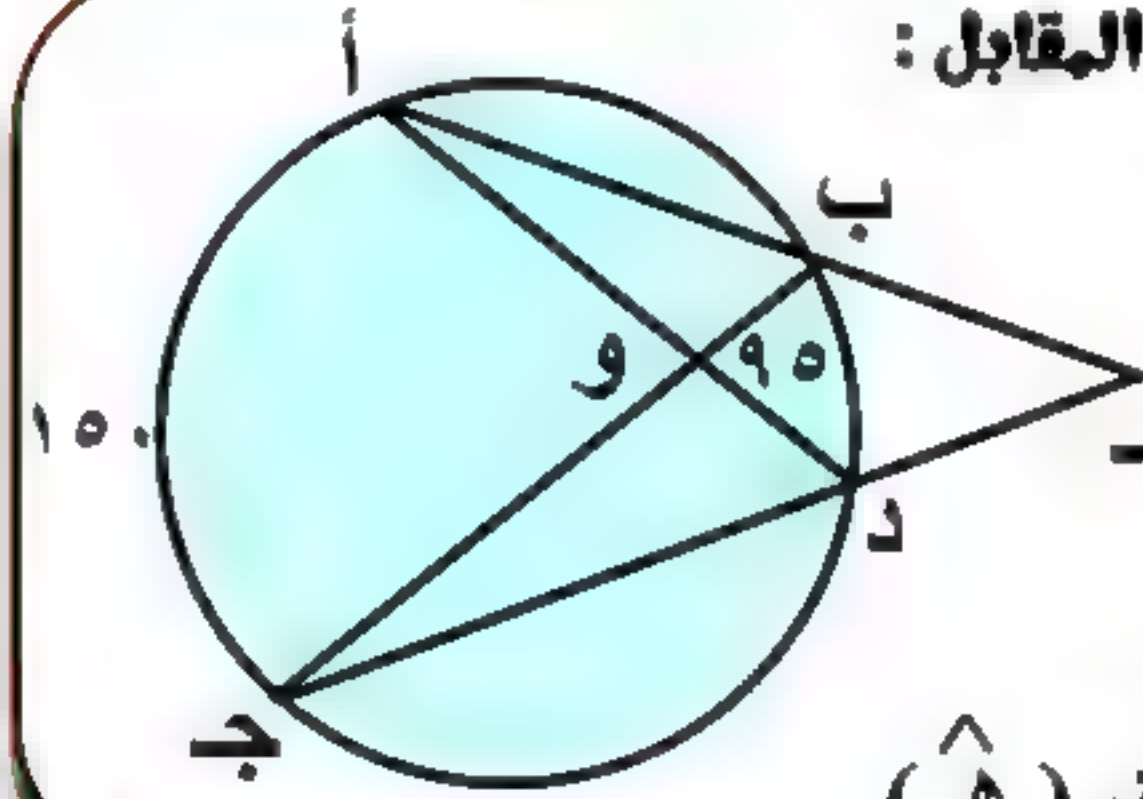
٢ في الشكل المقابل :



ق (أ) = 40° ق (ب د) = 32°
 ق (ب ج) = ق (د هـ)
 أوجد : (١) ق (ج هـ)
 (٢) ق (ب ج)

الحل

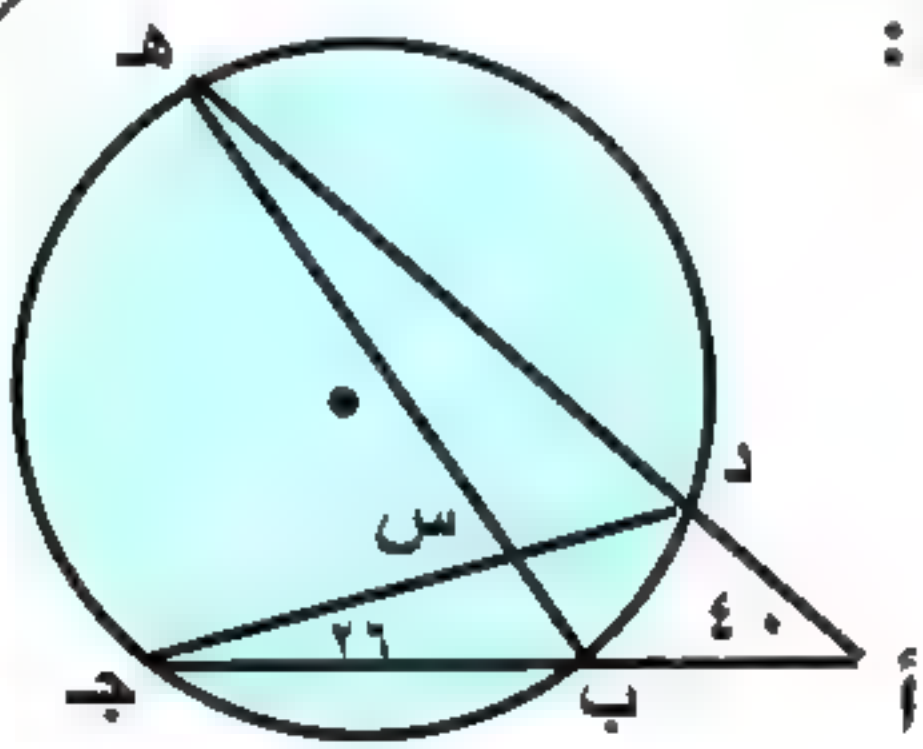
٣ في الشكل المقابل :



ق (ب و د) = 95°
 ق (أ ج) = 150°
 أوجد : (١) ق (ب د)
 (٢) ق (أ) ، ق (هـ)

الحل

٤ في الشكل المقابل :



ق (أ) = 40°
 ق (ب ج د) = 26°
 أوجد : (١) ق (ج هـ)
 (٢) ق (هـ س ج)

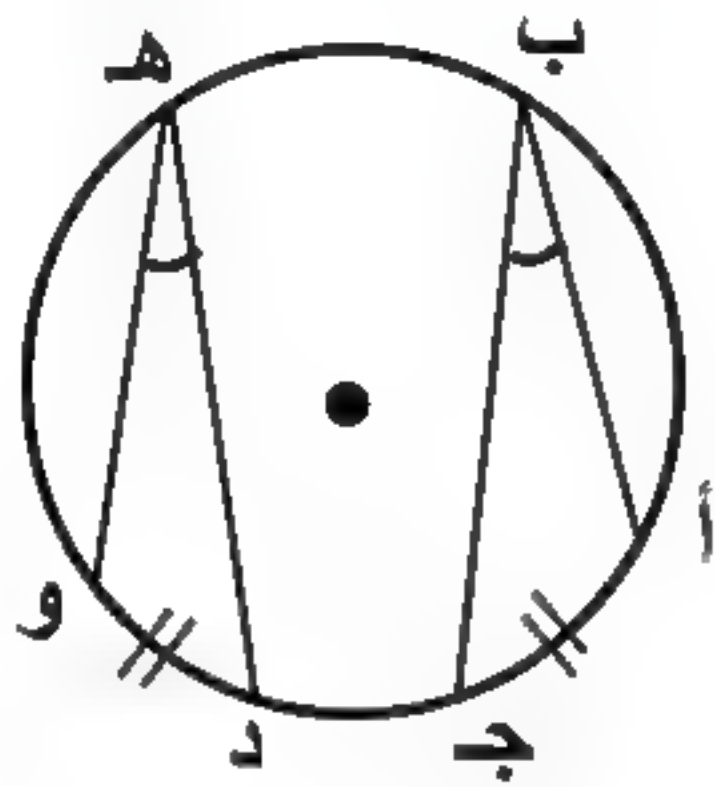
الحل

الزوايا المحيطية المشتركة في القوس

الدرس
الرابع 4

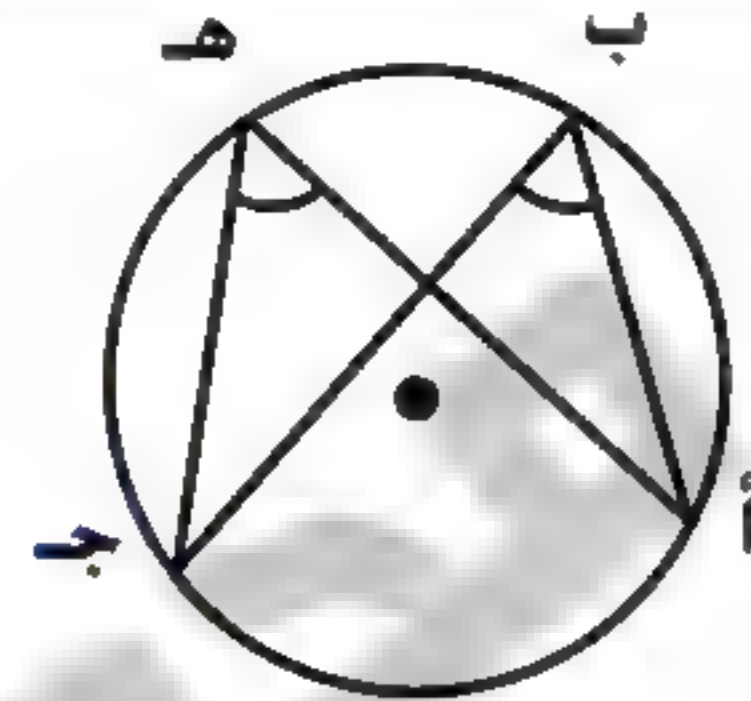
الزوايا المحيطية التي أقواسها
متساوية تكون متساوية في القياس

الزوايا المحيطية المشتركة في نفس
القوس متساوية في القياس



$$\begin{aligned} \therefore \angle A &= \angle B \\ \therefore \angle C &= \angle D \\ (\text{والعكس صحيح}) \end{aligned}$$

تصميم
محمود عوض
معلم رياضيات



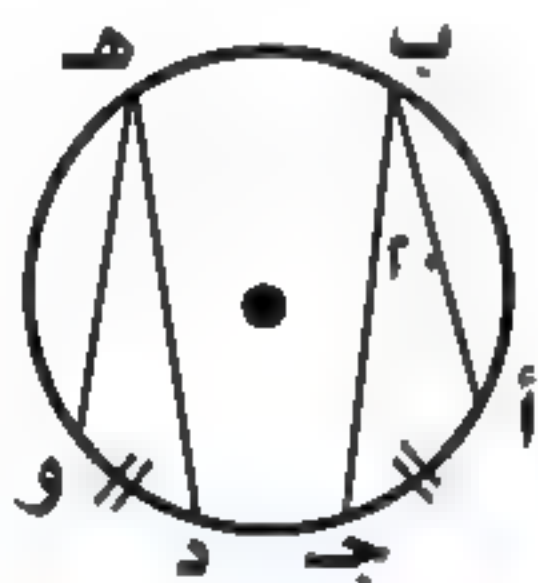
$$\angle C = \angle D$$

محيطيتان مشتركتان في القوس أ ج

$$\text{كذلك: } \angle A = \angle B$$

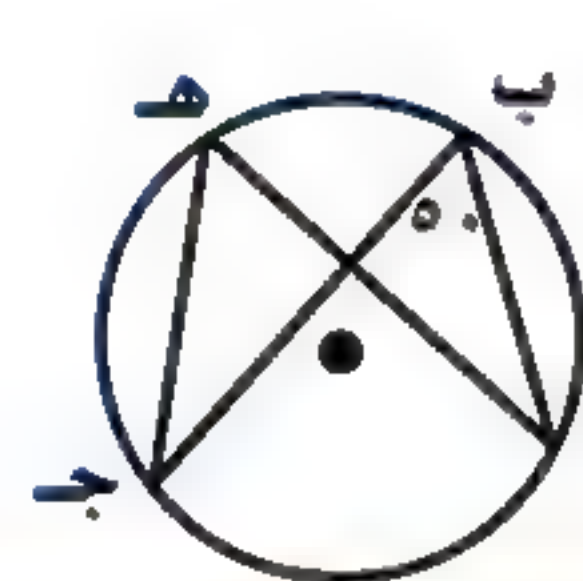
محيطيتان مشتركتان في القوس ب هـ

فمثلا : في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} \therefore \angle A &= \angle B \\ \therefore \angle C &= \angle D \end{aligned}$$

السبب:



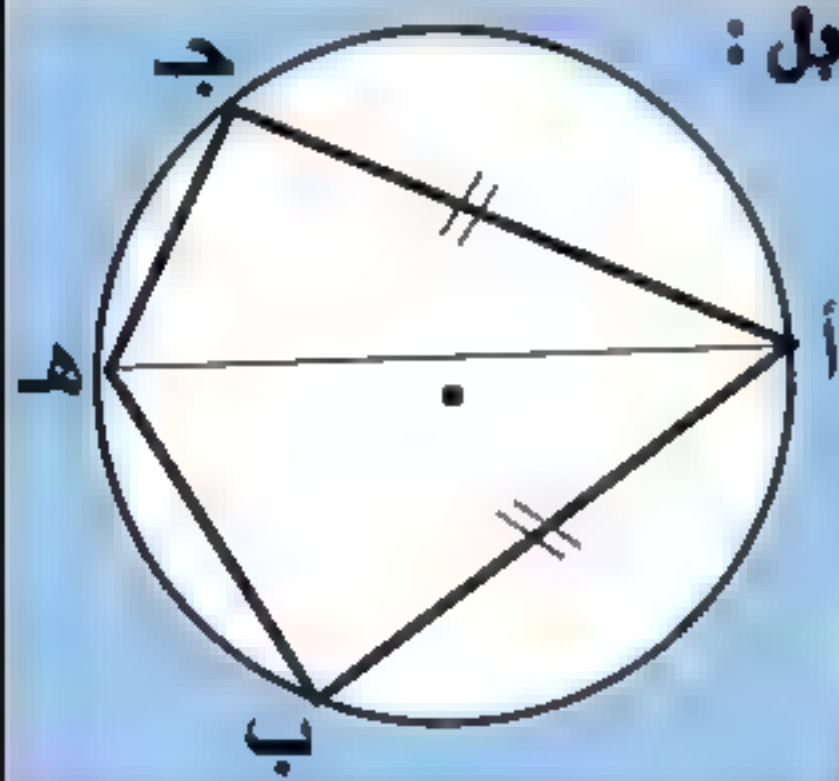
فمثلا : في الشكل المقابل :

$$\begin{aligned} \therefore \angle A &= \angle B \\ \therefore \angle C &= \angle D \end{aligned}$$

السبب:

مثال ٢

في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} \text{أ ب} &= \text{أ ج} \\ \text{هـ د} &= \text{ب ج} \end{aligned}$$

اثبت أن :

$$\angle A = \angle B$$

الحل

$$\therefore \text{أ ب} = \text{أ ج} \quad \text{أوتار متساوية}$$

$$\therefore \angle A = \angle B \quad \text{أقواس متساوية}$$

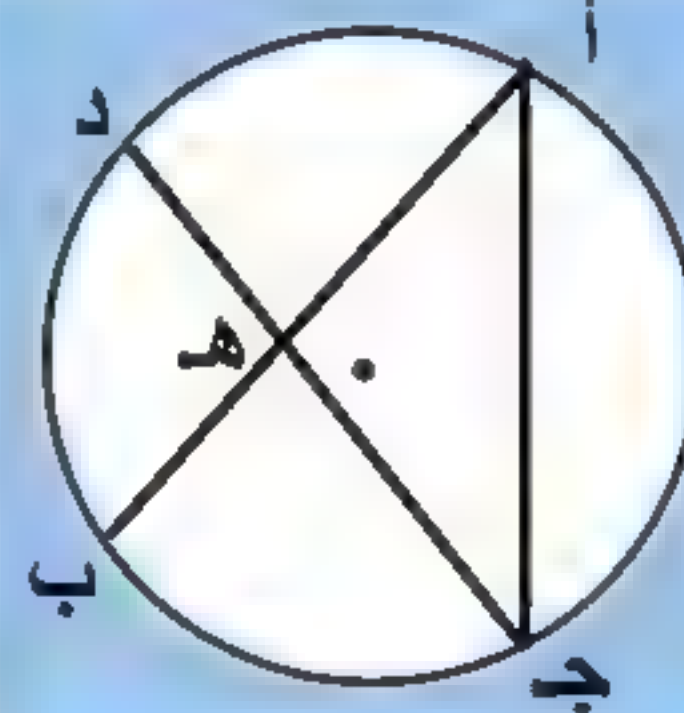
$$\therefore \angle A = \angle B$$

هـ ط ث

القاعدة الأولى: إذا كانت الأوتار متساوية فإن الأقواس متساوية
القاعدة الثانية: إذا كانت الأقواس متساوية فإن الزوايا المحيطية
المرسومة عليها متساوية

مثال ١

في الشكل المقابل :



أ ب ، ج د وتران متساويان
في الطول
اثبت أن :

$$\triangle \text{ أ ج هـ متساوي الساقين}$$

الحل

$$\therefore \text{أ ب} = \text{ج د} \quad \therefore \angle A = \angle B$$

بطرح ق (د ب) من الطرفين

$$\therefore \angle A = \angle B$$

$$\therefore \angle A = \angle B$$

$$\therefore \triangle \text{ أ ج هـ متساوي الساقين}$$

٥ في الشكل المقابل :
 أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع
 مرسوم داخل دائرة
 أ د = د هـ
 أثبت أن :
 Δ أ د هـ متساوي الأضلاع

الحل

∴ Δ أ ب ج متساوي الأضلاع

$$\therefore \angle ق (ب) = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ق (أ) = \angle ق (ب) = 60^\circ \quad \text{محيطيتان مشتركتان في أ ج}$$

∴ Δ أ د هـ متساوي الساقين

$$\therefore \angle ق (د أ هـ) = \angle ق (د هـ أ) = 60^\circ$$

∴ Δ أ د هـ متساوي الأضلاع

هـ ط ث

٣ في الشكل المقابل :
 أ ب ج مثلث مرسوم
 داخل دائرة
 د هـ // ب ج
 أثبت أن :
 ق (د أ ج) = ق (ب أ هـ)

الحل

$$\therefore د هـ // ب ج \quad \therefore \angle ق (د ب) = \angle ق (هـ ج)$$

$$\therefore \angle ق (د أ ب) = \angle ق (هـ أ ج) \quad \text{المحيطة}$$

لأنهما محيطيتان أقواسهما متساوية

وبإضافة ق (ب أ ج) للطرفين

$$\therefore \angle ق (د أ ج) = \angle ق (ب أ هـ) \quad \text{هـ ط ث}$$

معلم رياضيات
محمود عوض

٦ في الشكل المقابل :
 أ د ، ب هـ وتران متساويان في
 الطول في الدائرة
 أ د ∩ ب هـ = { ج }
 أثبت أن : ج د = ج هـ

الحل

$$\therefore أ د = ب هـ \quad \therefore \angle ق (أ د) = \angle ق (ب هـ)$$

وبإضافة ق (د هـ) للطرفين

$$\therefore \angle ق (أ هـ) = \angle ق (ب د)$$

$$\therefore \angle ق (ب) = \angle ق (أ) \quad \therefore ج أ = ج ب$$

في Δ ج أ ب :

$$\therefore ج أ = ج ب ، د أ = هـ ب$$

بالطرح ينتج أن : ج د = ج هـ

٤ في الشكل المقابل :
 أ ب ∩ ج د = { هـ }
 هـ أ = هـ د
 أثبت أن : هـ ب = هـ ج

الحل

$$\therefore هـ أ = هـ د \quad \therefore \angle ق (أ) = \angle ق (د)$$

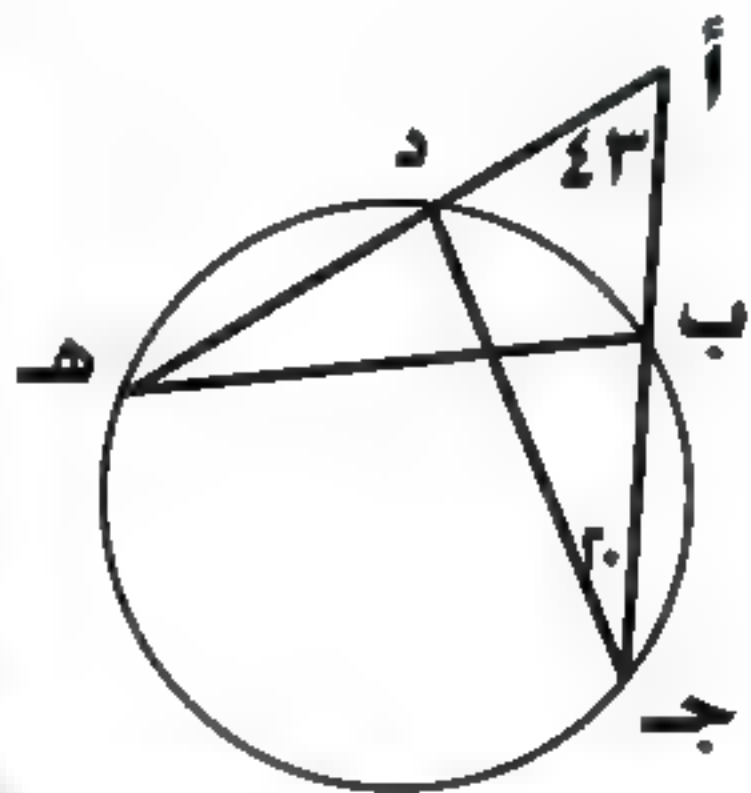
$$\therefore \angle ق (أ) = \angle ق (ج) \quad \text{محيطيتان مشتركتان في د ب}$$

$$\therefore \angle ق (د) = \angle ق (ب) \quad \text{محيطيتان مشتركتان في أ ج}$$

$$\therefore \angle ق (ج) = \angle ق (ب)$$

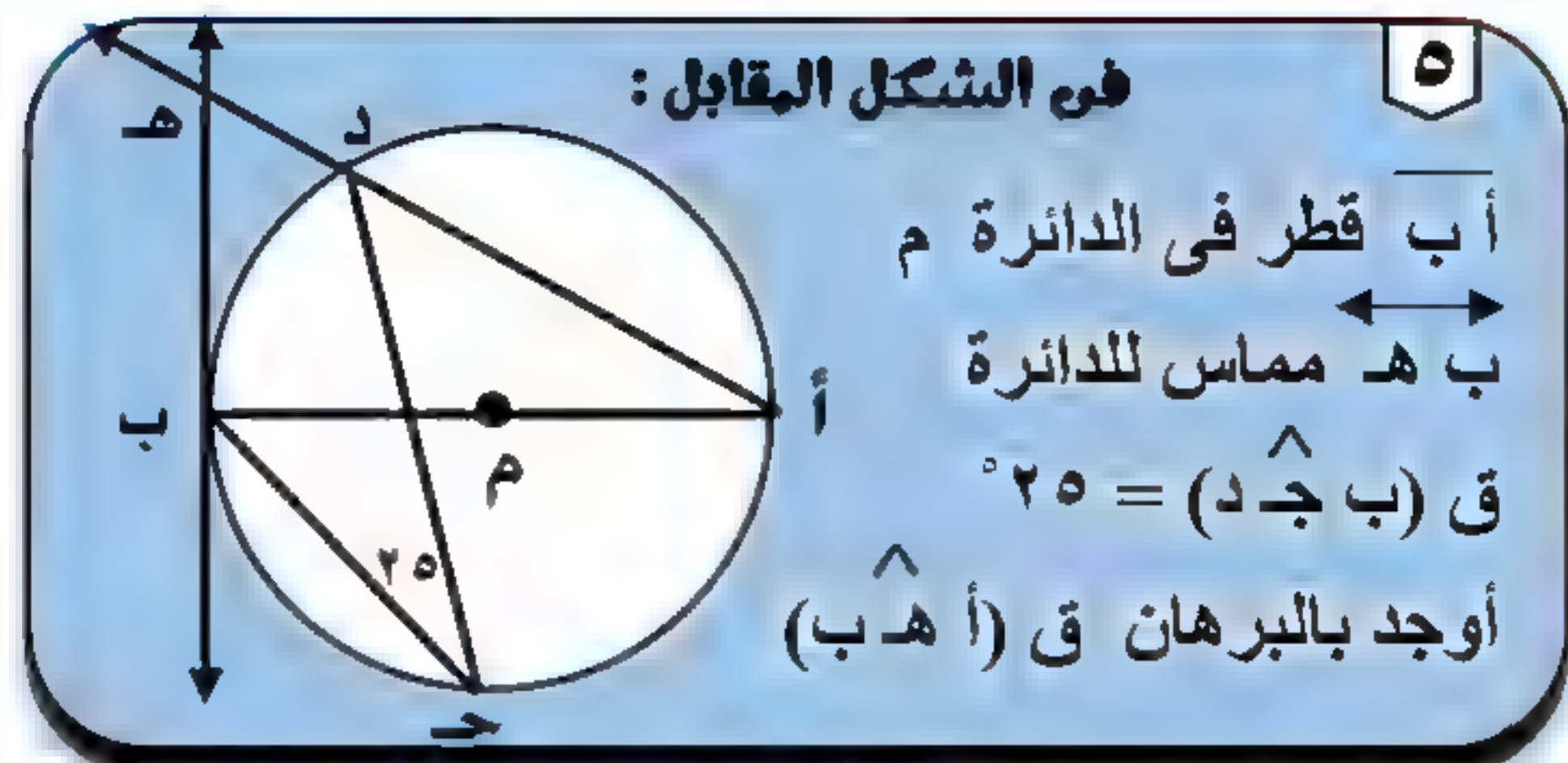
∴ Δ هـ ج ب متساوي الساقين ∴ هـ ب = هـ ج

٦



ق (أ) = 43°
 ق (ج) = 20°
 أوجد: ق (أ ب هـ)

الحل



في الشكل المقابل:

أ ب قطر في الدائرة م
 ب هـ مماس للدائرة
 ق (ب ج د) = 25°
 أوجد بالبرهان ق (أ هـ ب)

الحل

ب هـ مماس، أ ب قطر

∴ ق (هـ ب أ) = 90°

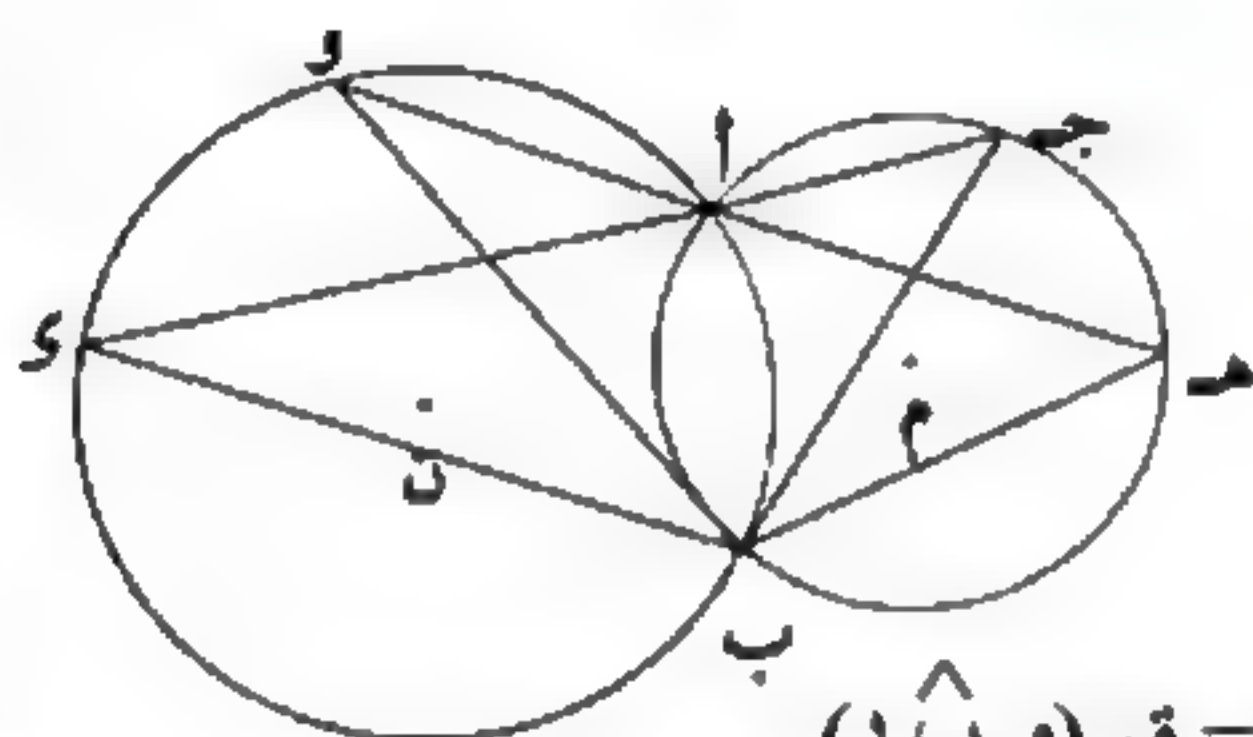
∴ ق (أ) = ق (ج) محيطتان مشتركتان في د ب

∴ ق (أ) = 25°

في $\triangle هـ ب أ$:

ق (أ هـ ب) = $180^\circ - (25^\circ + 90^\circ) = 65^\circ$

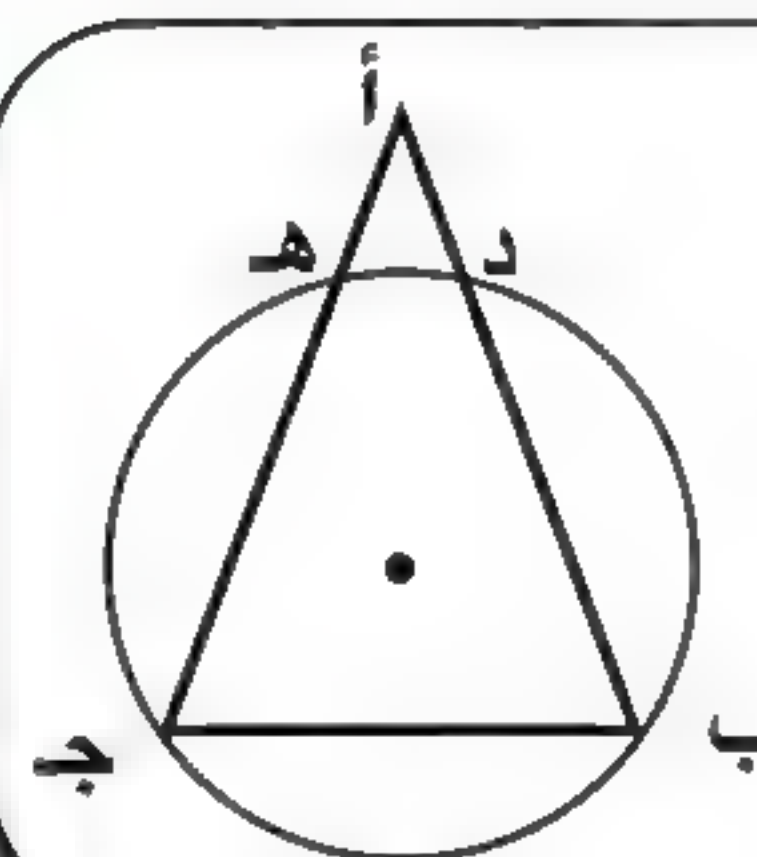
٨



اثبت أن:
 ق (هـ ب ج) = ق (و ب د)

الحل

٧



أ ب ج د فيه

أ ب = أ ج

اثبت أن:

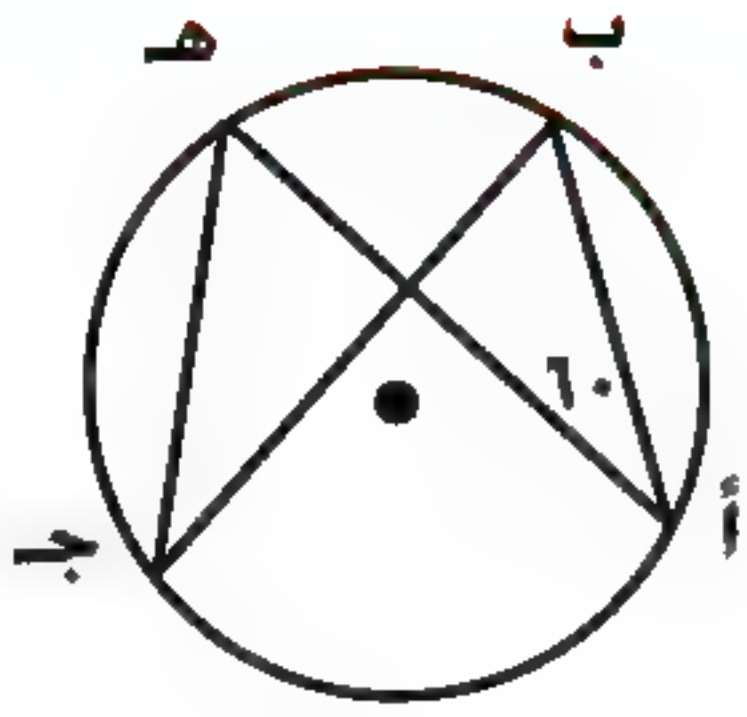
ق (د ب) = ق (هـ ج)

الحل

تمارين

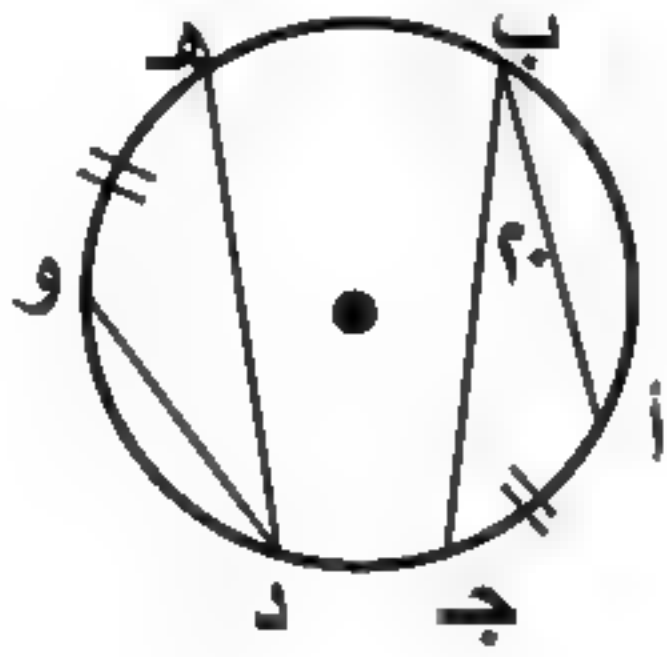
اختر الإجابة الصحيحة:

1 في الشكل المقابل: ق (أ) = ٦٠ فإن ق (ج) =°



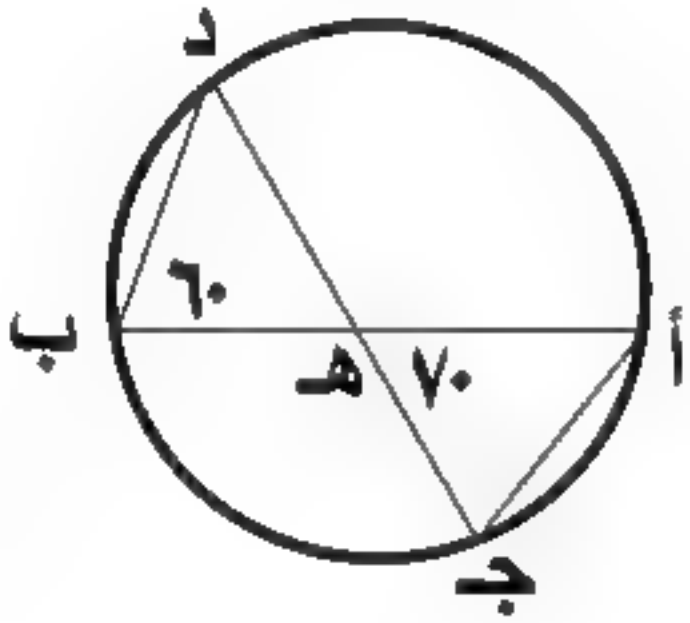
- (أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (ج) ٩٠ (د) ١٢٠

2 في الشكل المقابل: ق (أ ج) = ق (هـ و) فإن ق (د) =



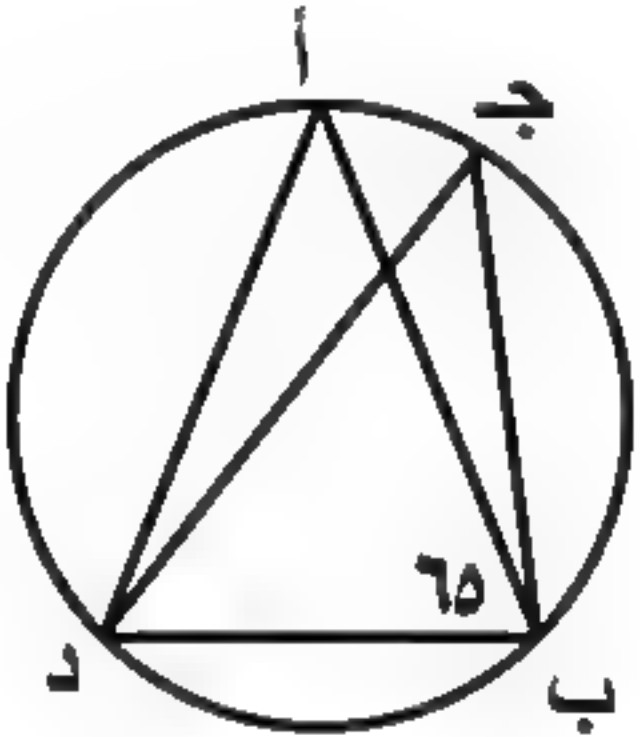
- (أ) ٢٠ (ب) ١٠ (ج) ٤٠ (د) ٨٠

3 في الشكل المقابل: ق (ب) = ٦٠°، ق (أ هـ ج) = ٧٠° فإن ق (أ) =°



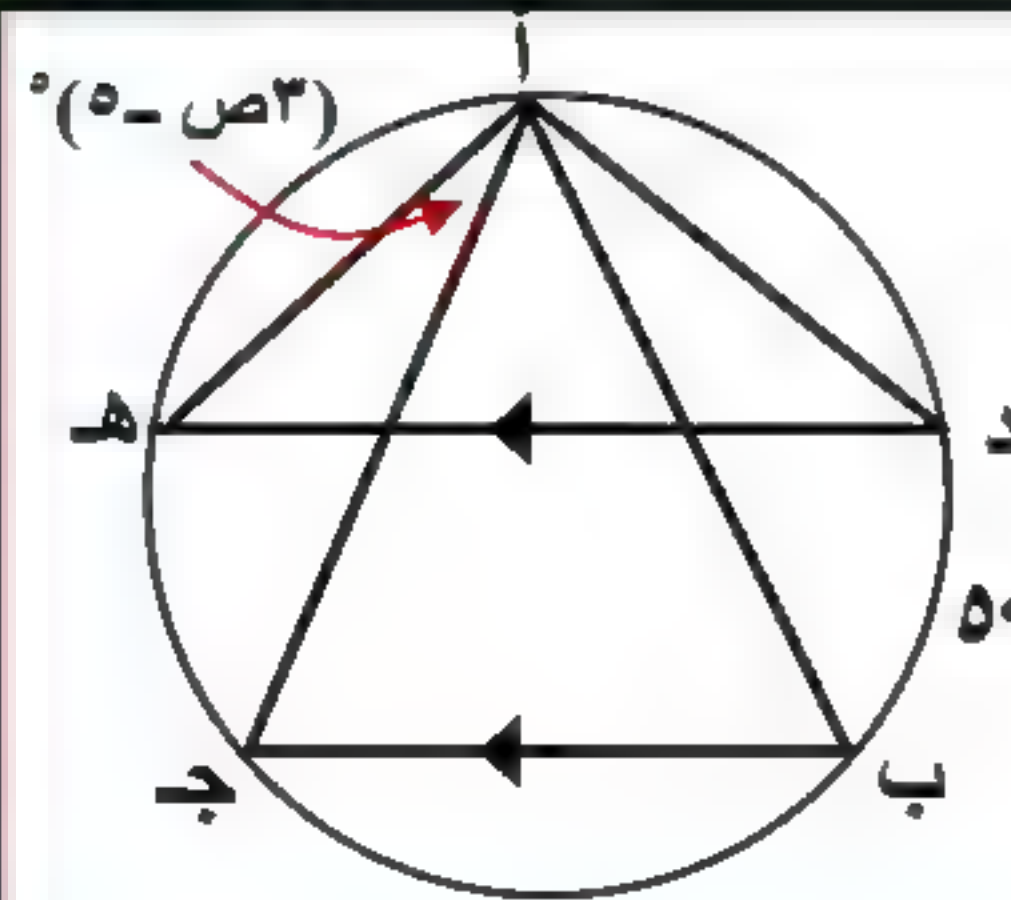
- (أ) ٥٠ (ب) ٦٠ (ج) ٧٠ (د) ٨٠

4 في الشكل المقابل: أب = أد، ق (أ ب د) = ٦٥° فإن ق (ج) =°



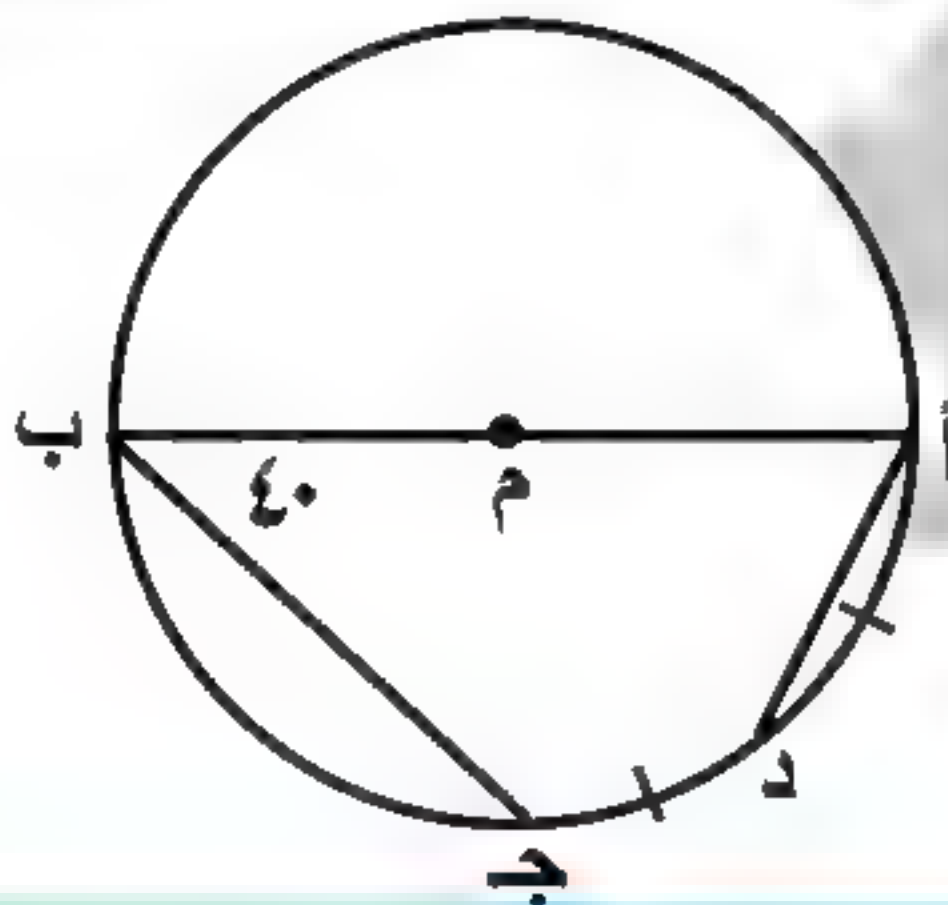
- (أ) ١٥ (ب) ٢٥ (ج) ٣٠ (د) ٥٠

1 في الشكل المقابل:



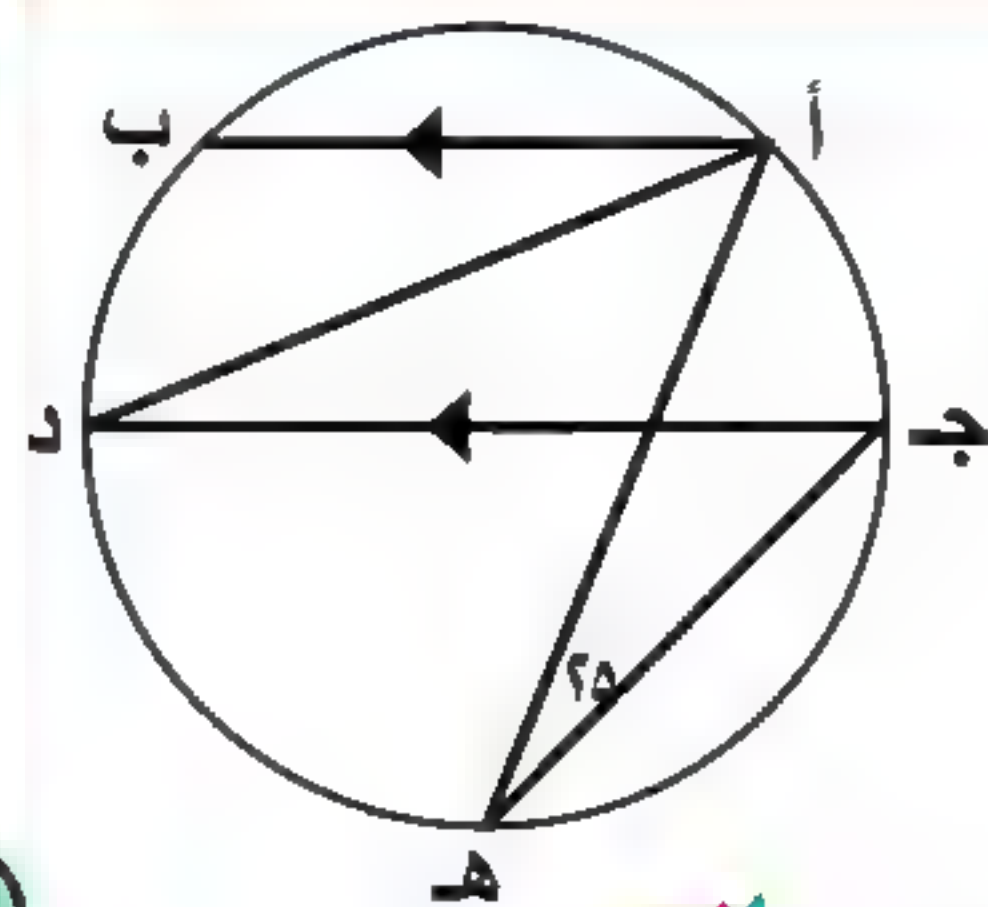
د هـ // ب ج
ق (د ب) = ٥٠°
ق (ج أ هـ) = ٣ ص - ٥
أوجد قيمة ص

2 في الشكل المقابل:



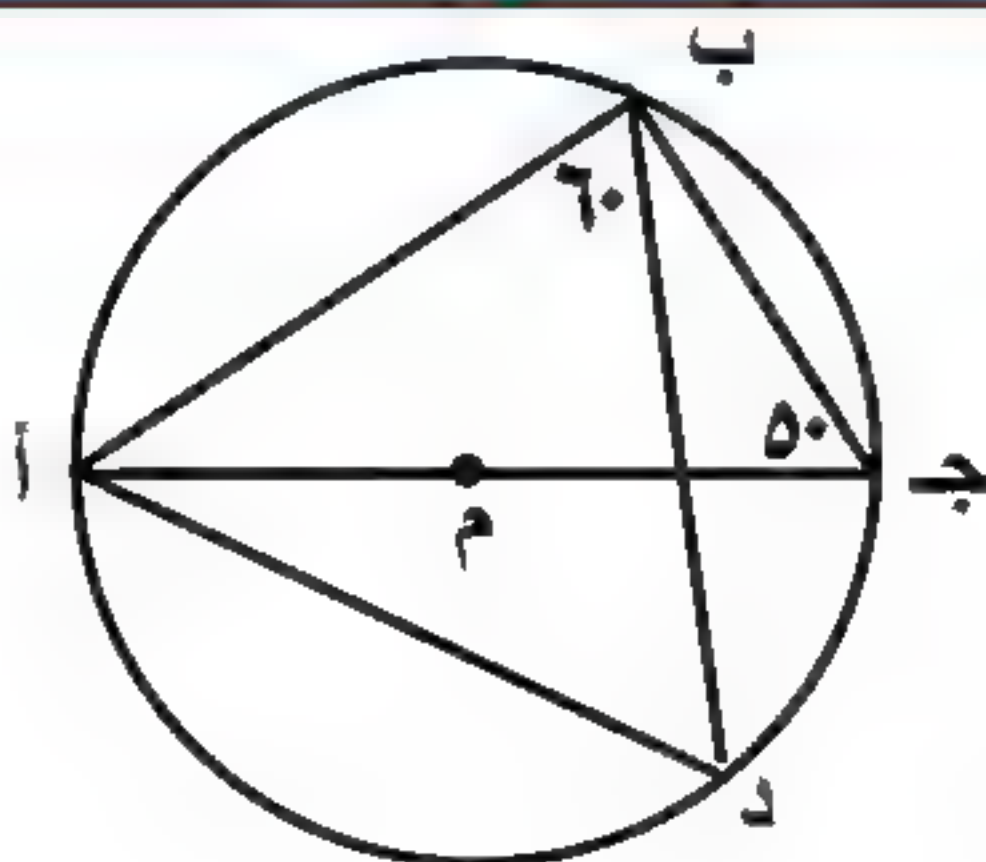
أ ب قطر في الدائرة م
ق (أ ب ج) = ٤٠°
ق (أ د) = ق (د ج)
أوجد ق (د أ ب)

3 في الشكل المقابل:



أ ب، ج د وتران متوازيان
ق (هـ) = ٢٥°
أوجد ق (ب أ د)

4 في الشكل المقابل:



أ ج قطر في الدائرة م
ق (ج) = ٥٠°
ق (أ ب د) = ٦٠°
أوجد: (١) ق (ج ب د)
(٢) ق (ب أ د)

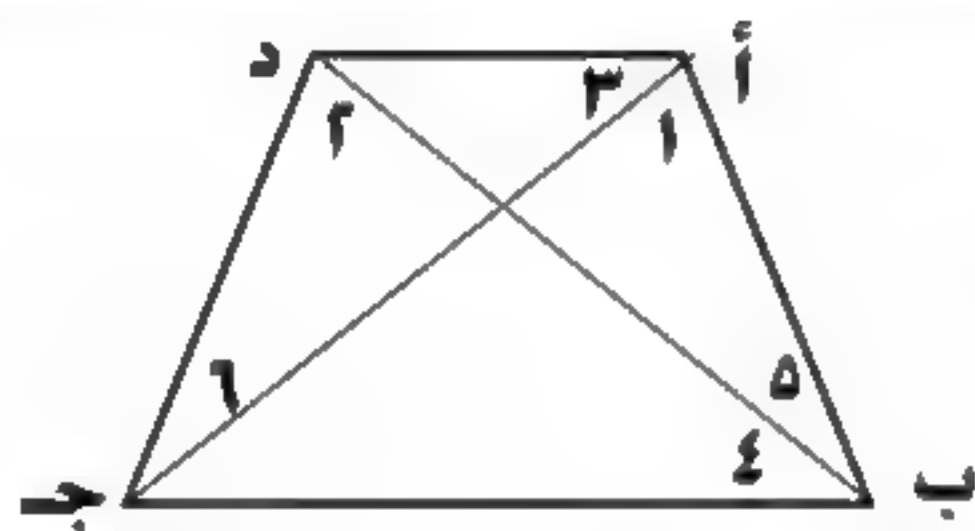
الشكل الرباعى الدائرى

الدرس
5
الخامس

الشكل الرباعى الدائرى : هو شكل رباعى تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة .
أي يمكن رسم دائرة تمر برؤوسه الأربعة

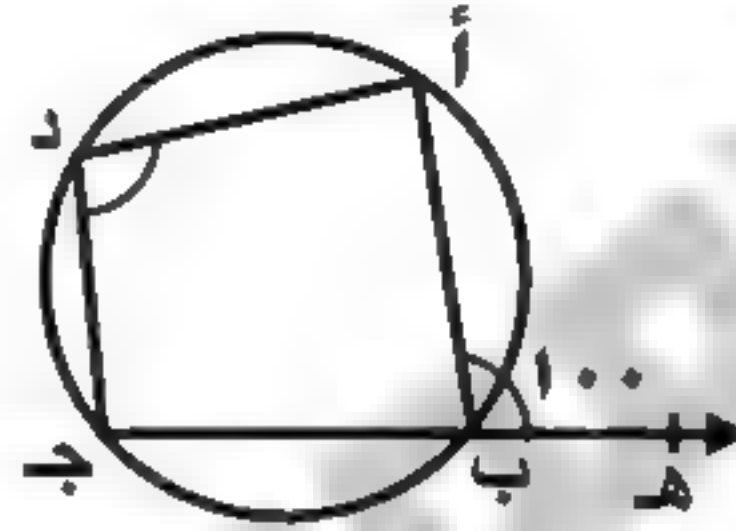
لو عرفت ان الشكل رباعى دائرى (سواء هو قالك فى المسألة أو لقيت رؤوسه الأربعة تقع على الدائرة) استنتج ٣ حاجات :

أي زاويتان مرسومتان على
قاعدة واحدة وفى جهة واحدة
منها متساويتان



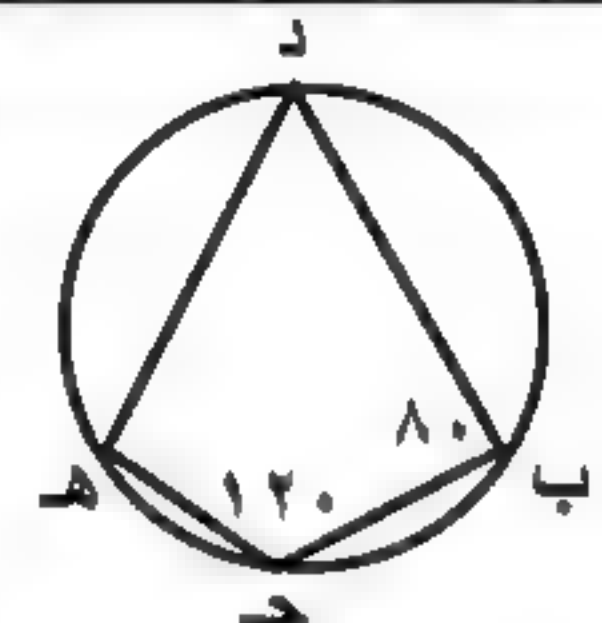
إذا كان أ ب ج د رباعى دائرى فإن:
ق(١) = ق(٢) مرسومتان على ب ج
ق(٣) = ق(٤) مرسومتان على د ج
ق(٥) = ق(٦) مرسومتان على أ د

قياس الزاوية الخارجة =
قياس المقابلة للمجاورة



الشكل أ ب ج د رباعى دائرى
:: ق(أ ب هـ) الخارجة = ق(د)
:: ق(د) = ١٠٠

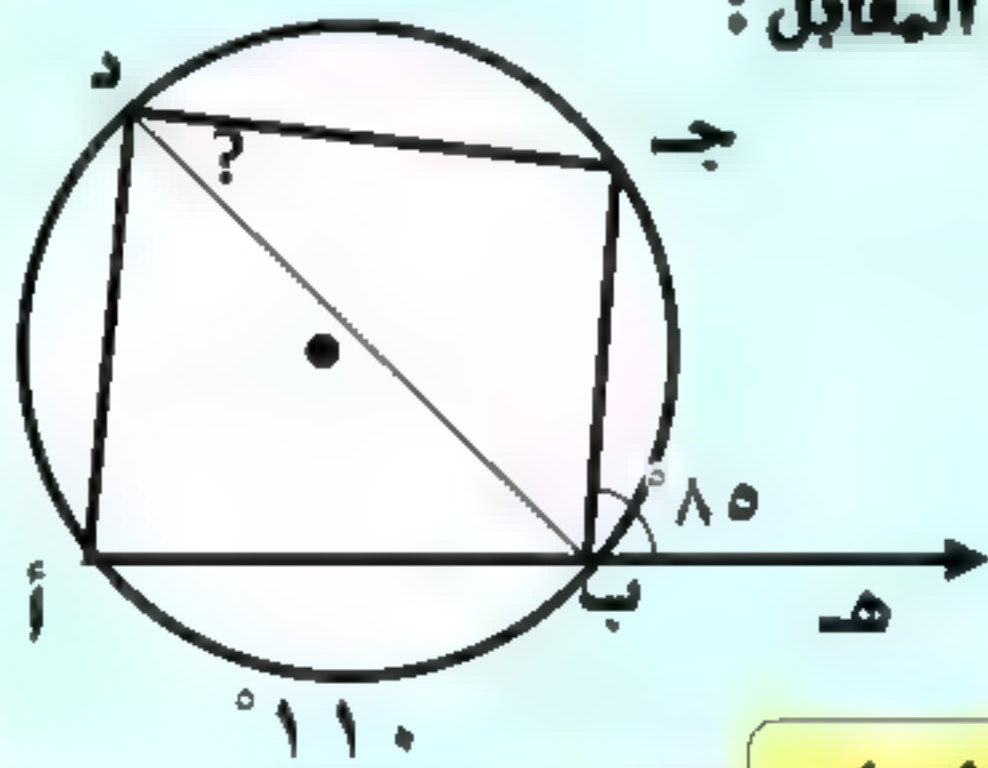
كل زاويتان متقابلتان
مجموعهما = ١٨٠



الشكل أ ب ج د رباعى دائرى
:: ق(ب) + ق(د) = ١٨٠
ق(د) + ق(ج) = ١٨٠
:: ق(د) = ١٨٠ - ١٢٠ = ٦٠
ق(هـ) = ١٨٠ - ٨٠ = ١٠٠

مثال ٢

فى الشكل المقابل :



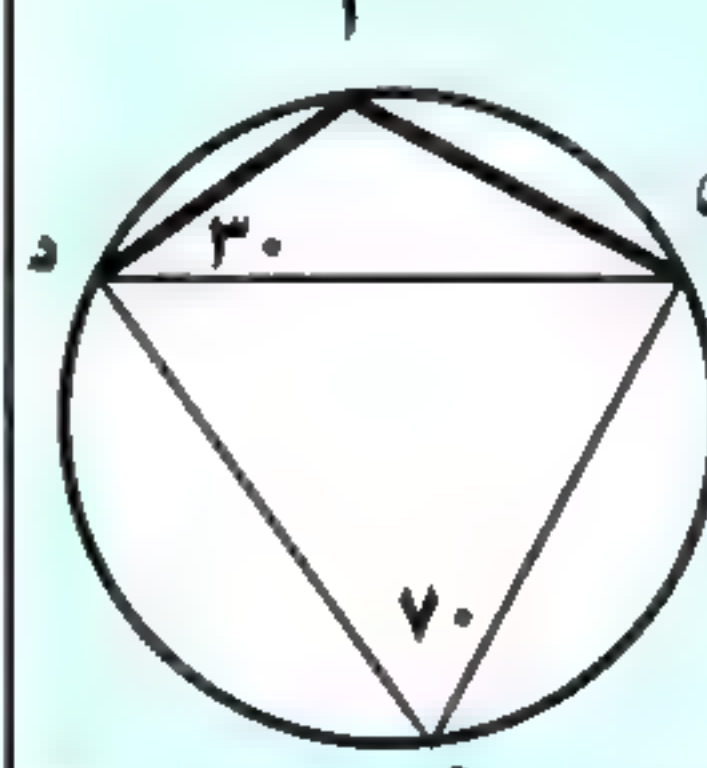
أ ب هـ
ق(أ ب) = ١١٠
ق(ج ب هـ) = ٨٥
أوجد ق(ب د ج)

الحل

:: ق(أ ب) = ١١٠
:: ق(ب د أ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(أ ب) = $\frac{1}{2} \times ١١٠ = ٥٥$
:: ج ب هـ خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب ج د
:: ق(ج د أ) = ق(ج ب هـ) = ٨٥
:: ق(ب د ج) = ق(ج د أ) - ق(ب د أ)
٣٠ = ٥٥ - ٨٥ =

مثال ١

فى الشكل المقابل :



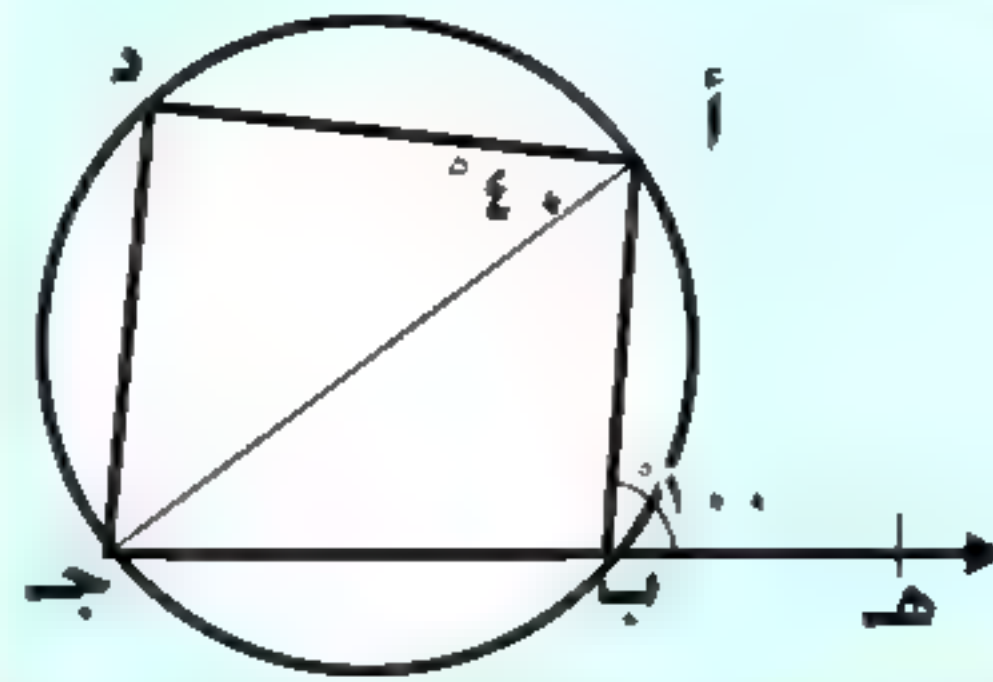
أ ب ج د شكل رباعى مرسوم داخل
دائرة ، ق(ج) = ٧٠ ،
ق(أ د ب) = ٣٠
أوجد : ق(أ ب د)

الحل

:: أ ب ج د رباعى دائرى
:: ق(أ) + ق(ج) = ١٨٠
:: ق(أ) = ١٨٠ - ٧٠ = ١١٠
فى Δ أ ب د :
ق(أ ب د) = $(٣٠ + ١١٠) - ١٨٠ = ٤٠$

تصميم
معلم رياضيات
محمود عوض

٤ في الشكل المقابل :



ق (أَبْه) = ١٠٠

ق (جأد) = ٤٠

اثبت أن :

ق (جَد) = ق (أَد)

الحل

∴ $\hat{A}B$ هـ زاوية خارجة عن الرباعي الدائري $ABCD$

$$\therefore \text{ق}(\hat{\text{د}}) = \text{ق}(\hat{\text{أ ب هـ}}) = ۱۰۰\%$$

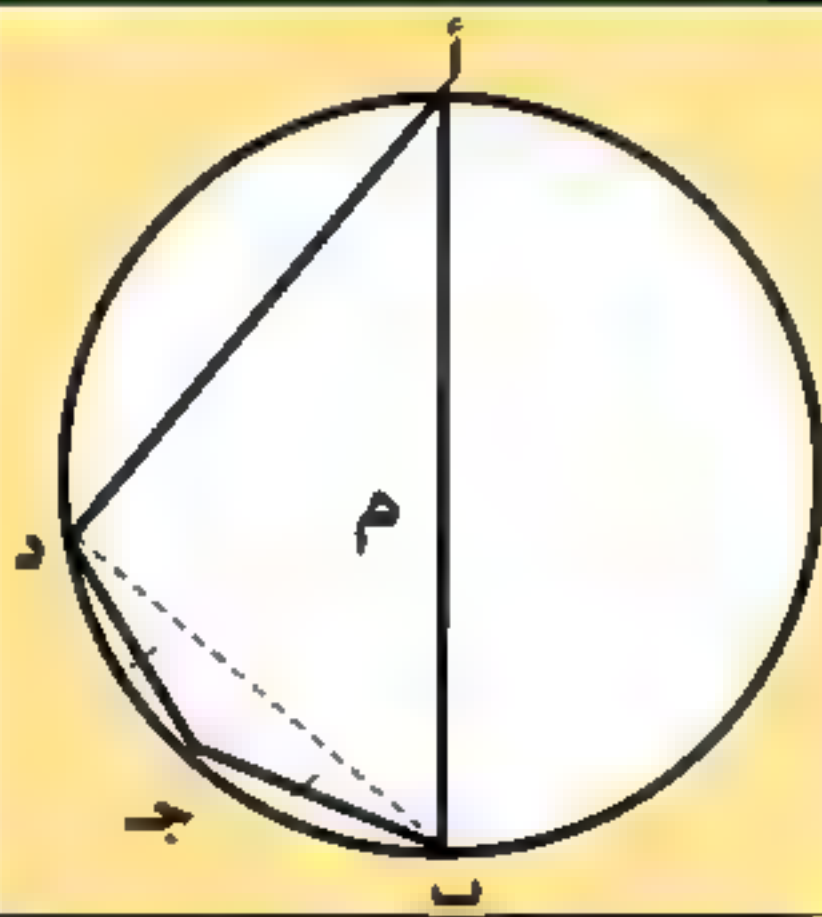
في Δ أ د ج :

ق (أجـد) = ۱۸۰ - (۴۰ + ۱۰۰) = ۴۰

∴ ق(د أ ج) = ق(أ ج د) = ٤٠

$$A = A' = A''$$
$$\therefore \text{ق}(\widehat{\text{جـ د}}) = \text{ق}(\widehat{\text{أ د}})$$

مطابق



٤ في الشكل المقابل :
أ ب ج د شكل رباعي مرسوم
داخل الدائرة م

ج ب = ج د

ق (ب ج د) = ۱۴۰

أوجد: ١- ق (أ) ٢- ق (د)

الحل

العمل نرسم ب د

٢٠: الشكل أ ب ج د رباعي دائري

$$\therefore 180^\circ = \hat{A} + \hat{C} + \hat{J}$$

المطلوب الأول $\therefore \text{ق}(\hat{1}) = 180 - 140 = 40^\circ$

فی Δ جیب :

∴ جب = جد ∴ ق(جدب) = ق(جب د)

$$٢٠ = \frac{١٤٠ - ١٨٠}{٢} = \hat{ق} (ج د ب) = \hat{ق}$$

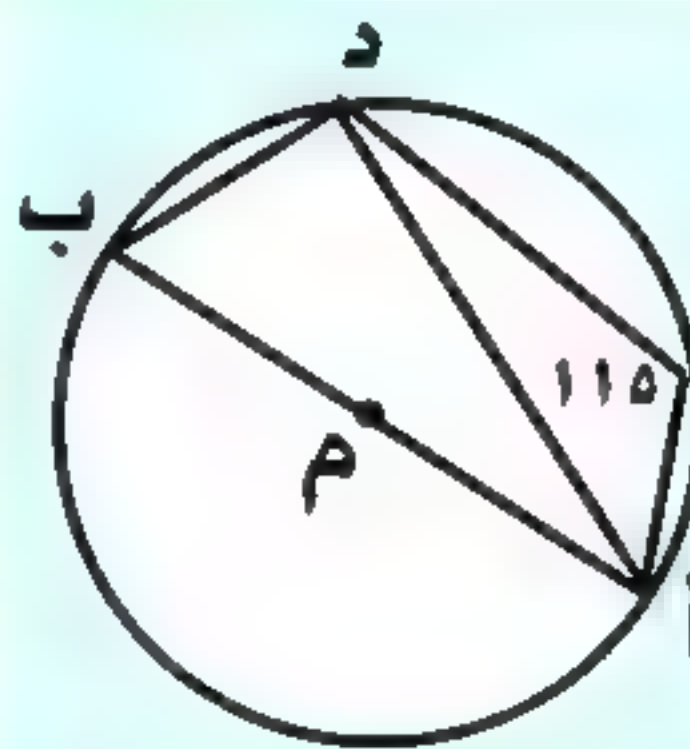
محيطية مرسومة في نصف دائرة

$$\therefore 110 = 90 + 20 = (\hat{d})$$

تدريبات

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

في الشكل المقابل :



أ ب قطر في الدائرة م

ق (أجد) = ۱۱۵°

أوجد بالبرهان : ق (د أ ب)

٦ في الشكل المقابل :

أب قطر في الدائرة م

ق (د ا ه) = ۱۰۰

ج د = ج ب

أوجد بالخطوات : ق (أ د ج)

تمارين

اختر الإجابة الصحيحة:

1 الشكل الرباعي الدائري في الأشكال التالية هو

(أ) المعين (ب) المستطيل (ج) متوازي الأضلاع (د) شبه المنحرف

1 أ ب ج د شكل رباعي دائري فيه ق (أ) = 60° فإن ق (ج) =

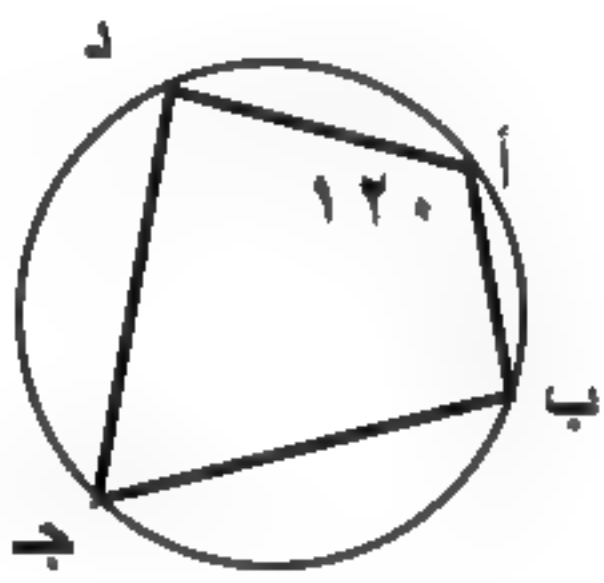
(أ) 60° (ب) 30° (ج) 90° (د) 120°

3 إذا كان الشكل أ ب ج د رباعي دائري وكان ق (أ) = 1/4 ق (ج) فإن ق (أ) =

(أ) 90° (ب) 60° (ج) 120° (د) 180°

4 في الشكل المقابل : ق (أ) = 120° فإن ق (ج) =

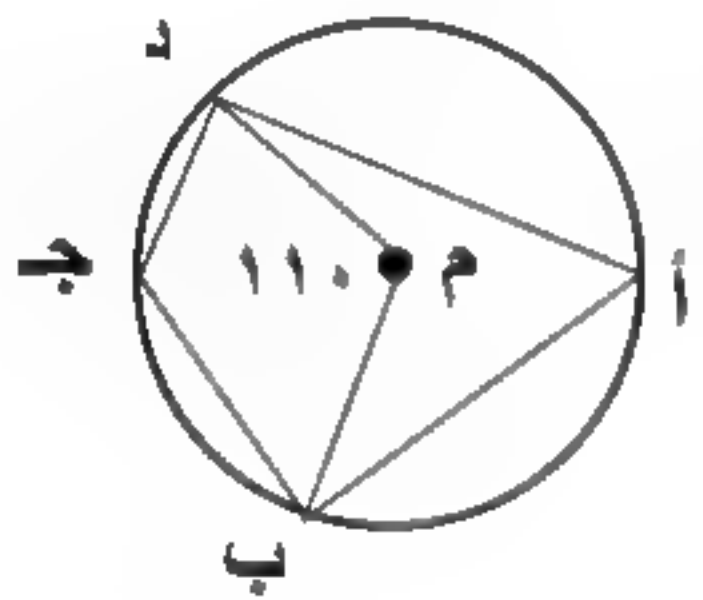
(أ) 60° (ب) 90° (ج) 120° (د) 180°



5 في الشكل المقابل : دائرة مركزها م

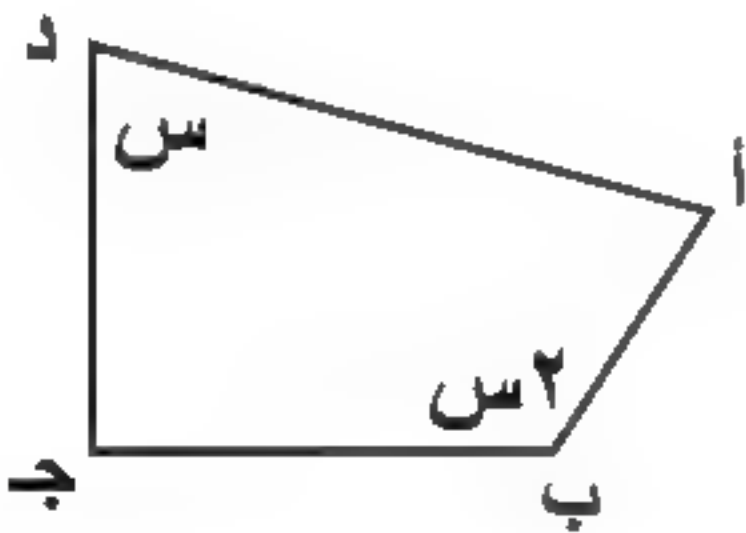
ق (ب م د) = 110° فإن ق (ج) =

(أ) 70° (ب) 110° (ج) 125° (د) 55°



6 في الشكل المقابل : أ ب ج د شكل رباعي دائري فإن س =

(أ) 120 (ب) 100 (ج) 60 (د) 50



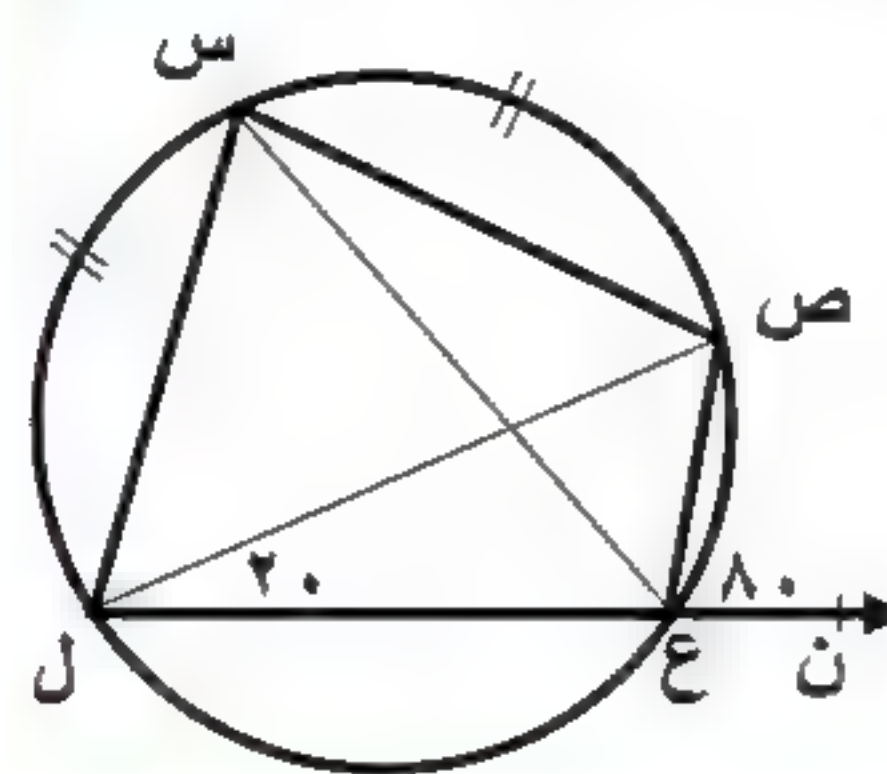
1 س منتصف ص ل

ق (ص ع ن) = 80°

ق (ص ل ع) = 20°

أوجد : (١) ق (ع س ل)

(٢) ق (س ص ع)



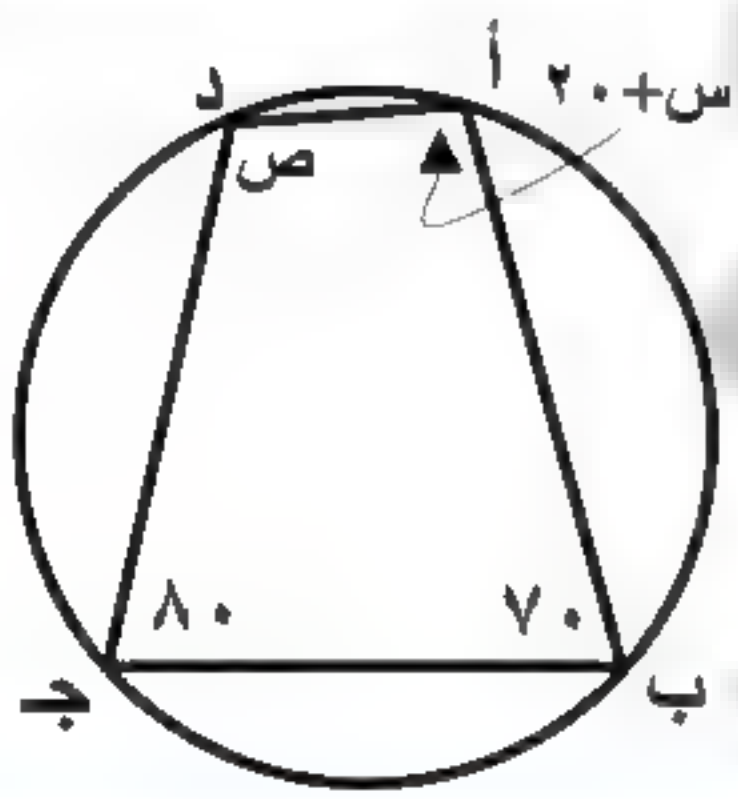
3 ق (ب) = 70°

ق (ج) = 80°

ق (د) = ص

ق (أ) = ص + 20°

أوجد قيمتي س ، ص

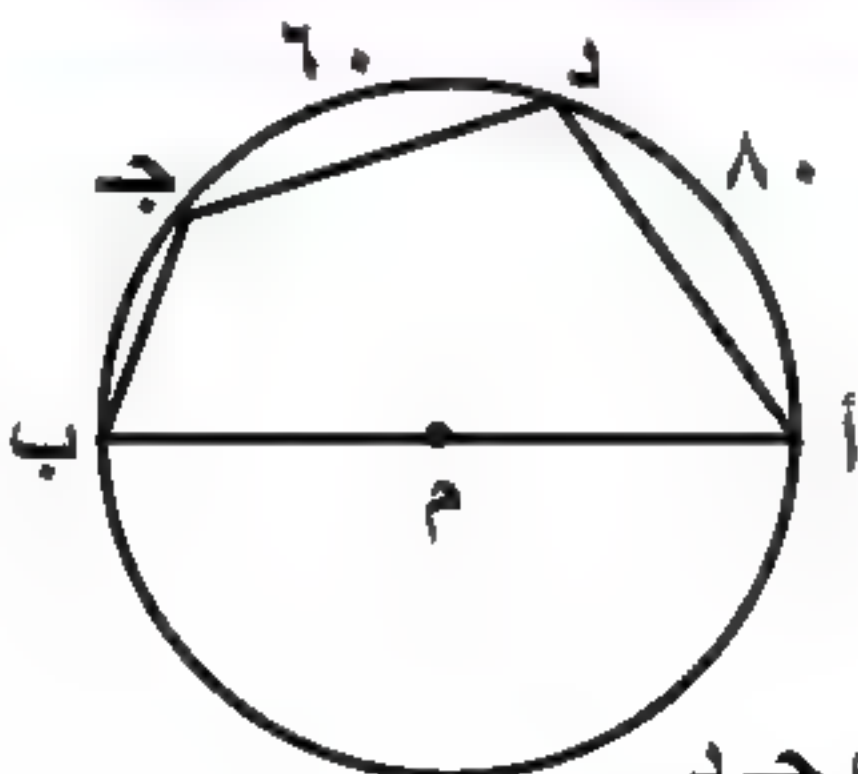


4 أ ب قطر في الدائرة م

ق (أ د) = 80°

ق (د ج) = 60°

أوجد قياسات زوايا الشكل أ ب ج د



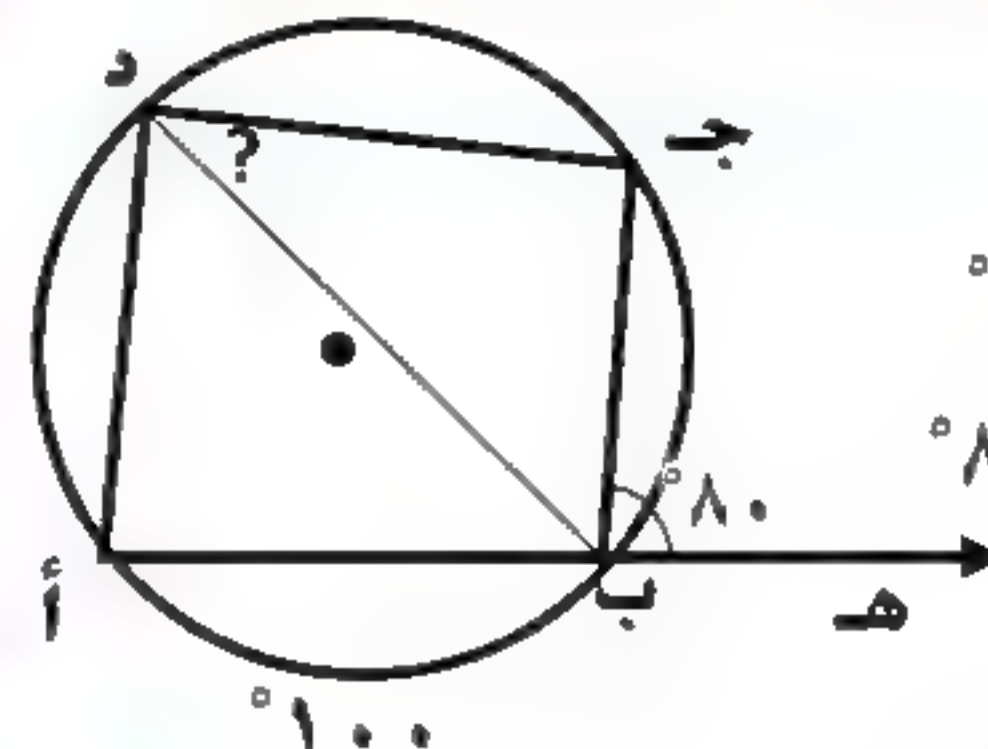
2

هـ أ ب

ق (أ ب) = 100°

ق (ج ب هـ) = 80°

أوجد ق (ب د ج)



إثبات أن الشكل رباعي دائري

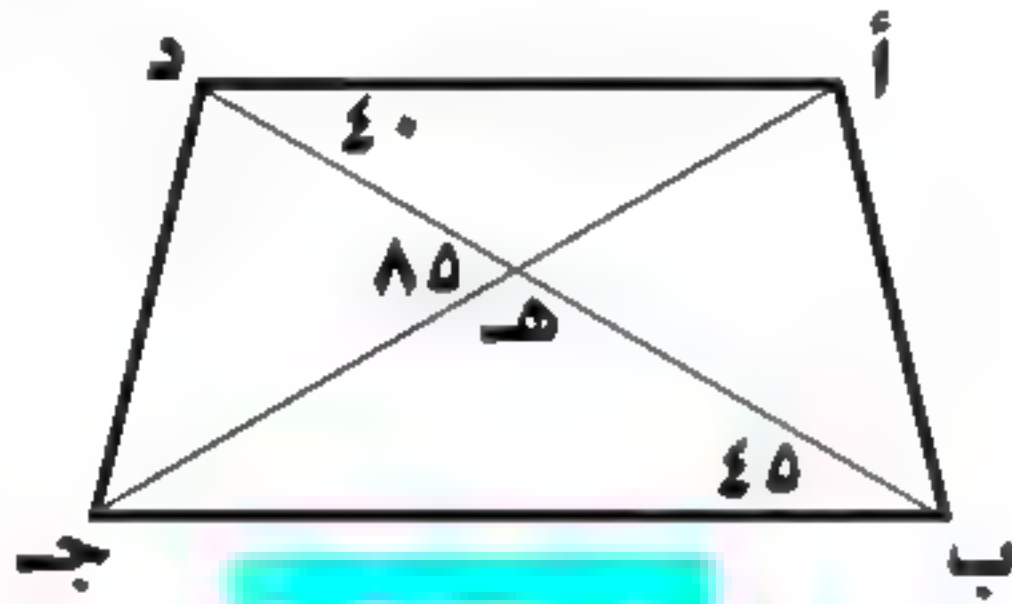
الدرس
6 السادس

لو قالك اثبت أن الشكل رباعي دائري إبحث عن إحدى الحالات الثلاثة الآتية واثبتها:

زاويتان مرسومتان على
قاعدة واحدة ومتساويتان

مثال لذيد

في الشكل المقابل عايزين نثبت
أن : أ ب ج د رباعي دائري



طريقة الحل

شايف الزاوية ٨٥ ؟

دى خارجة عن $\triangle HBC$

$$\therefore \angle AHC = \angle BHD + \angle HBC \Rightarrow 85 = 40 + \angle HBC$$

كده ظهر لنا زاويتين متساويتين

ومرسومتين على قاعدة واحدة

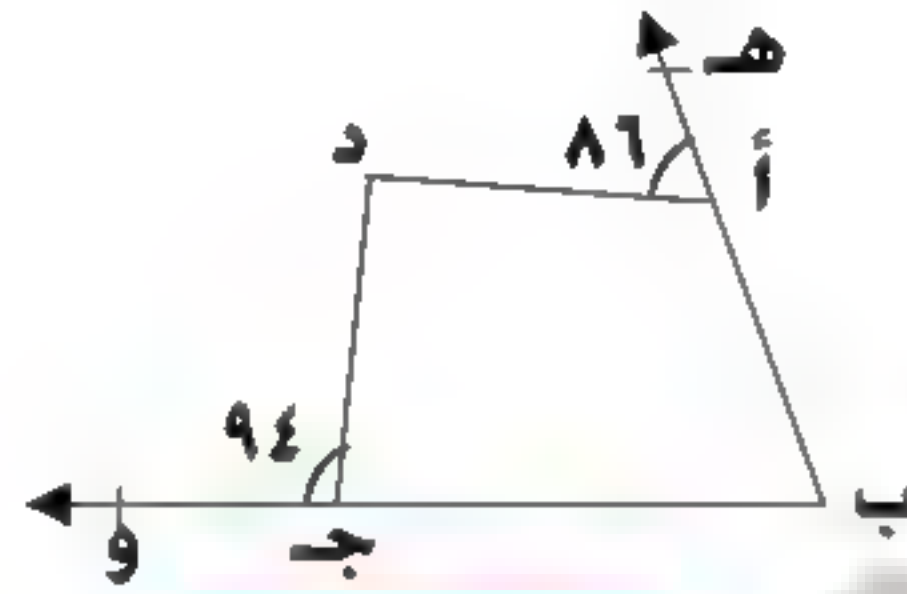
وهما $\angle AHC = \angle BHD$

\therefore الشكل رباعي دائري

زاوية خارجة قياسها =
قياس المقابلة للمجاورة

مثال لذيد

في الشكل المقابل عايزين نثبت
أن : أ ب ج د رباعي دائري



طريقة الحل

شايف الزاوية ٩٤ ؟

هي واللى جنبها زاوية مستقيمة

$$\therefore \angle ADE + \angle ABC = 180 \Rightarrow 81 + 94 = 175$$

كده ظهر لنا زاويتين متساويتين

الخارجة = المقابلة للمجاورة

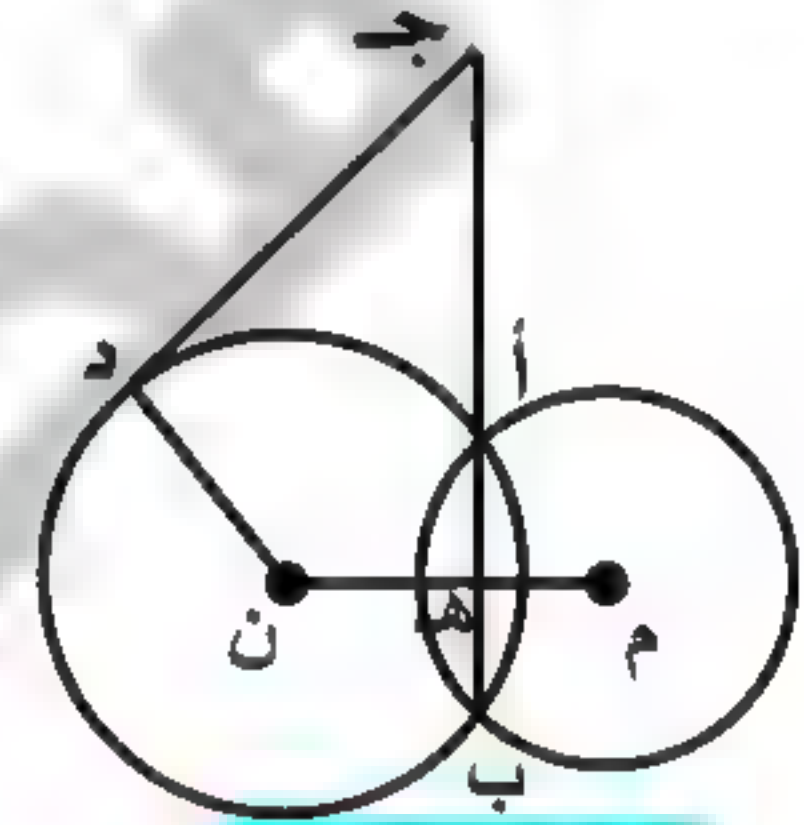
وهما $\angle ADE = \angle ABC$

\therefore الشكل رباعي دائري

زاويتان متقابلتان
واثبت أن :
مجموعهما = ١٨٠

مثال لذيد

في الشكل المقابل عايزين نثبت
أن : ج ه ن د رباعي دائري



طريقة الحل

في الشكل ج ه ن د

$$\angle GHN = 90^\circ \text{ (مماس)}$$

$$\angle AHN = 90^\circ \text{ (مماس)}$$

و الزاويتين د ، ه متقابلتين

$$\text{ولو جمعناهم} = 180^\circ$$

\therefore الشكل رباعي دائري

حاول بنفسك

سؤال مهم :

اذكر ٣ حالات يكون فيها الشكل الرباعي دائرياً ؟

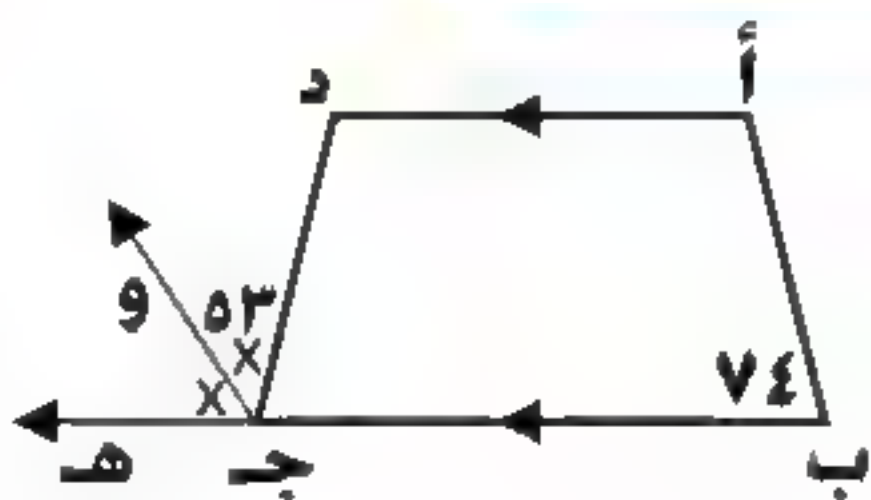
الإجابة :

١- إذا وجد زاويتان متقابلتان متكاملتان

٢- إذا وجد زاوية خارجة قياسها = المقابلة للمجاورة

٣- إذا وجد زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة

وفي جهة واحدة منها ومتساويتان



في الشكل المقابل :

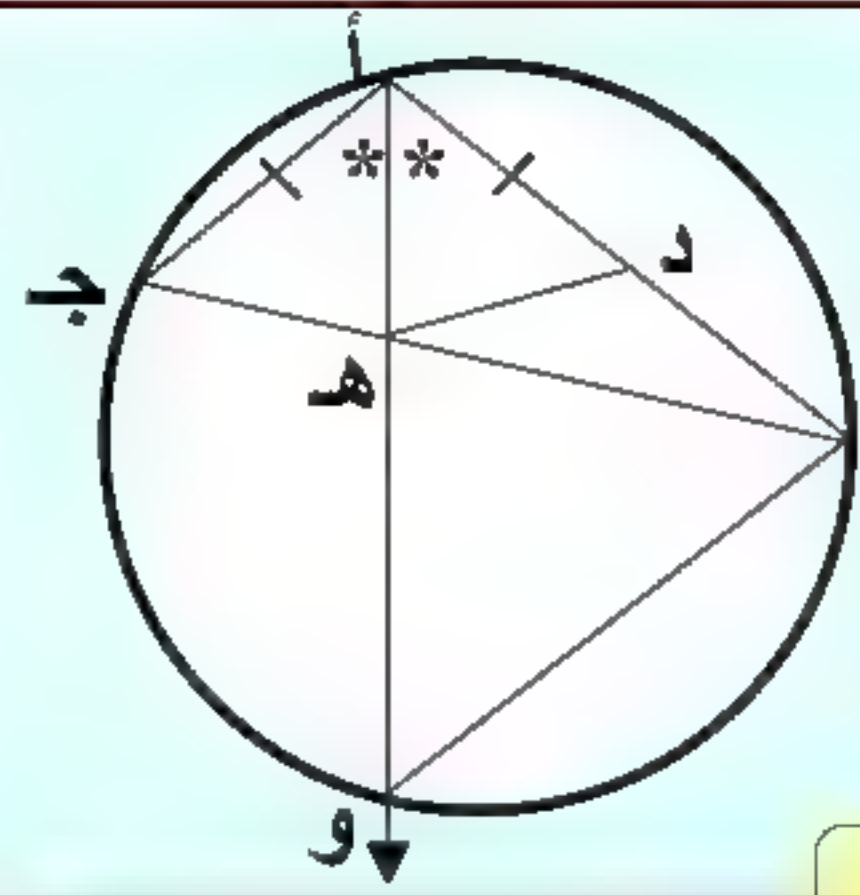
أ د // ب ج

ج وينصف د ج ه

$$\angle ADE = 53^\circ$$

$$\angle ABC = 74^\circ$$

اثبت أن : أ ب ج د رباعي دائري



أد = أج،

أو ينصف ب أج

اثبت أن:

د ب ه و رباعي دائري

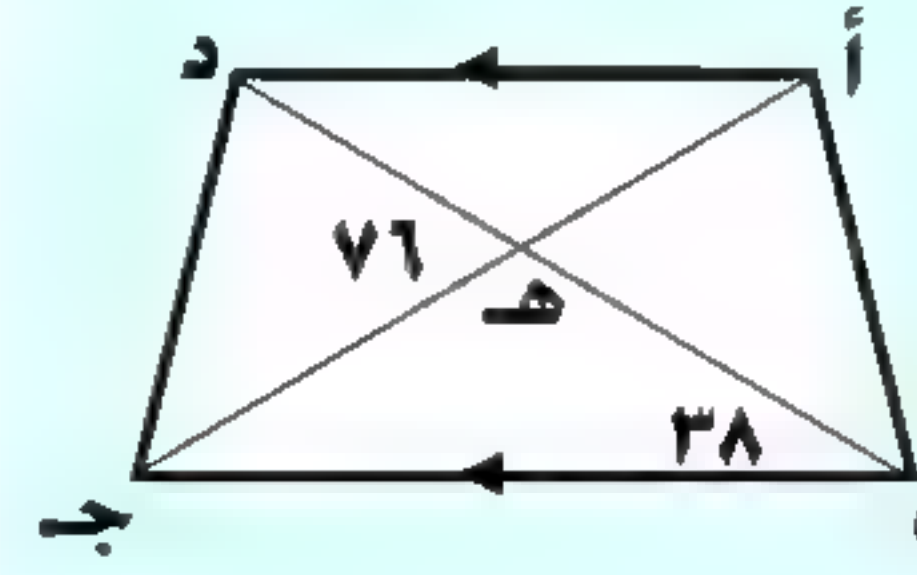
الحل $\triangle ADE, \triangle AHE$ فيهما: $\angle ADE = \angle AHE$ ق (د أ ه) = ق (ج أ ه)

أد = أج

أ ه ضلع مشترك

 $\therefore \triangle ADE \cong \triangle AHE$ $\therefore \angle ADE = \angle AHE$ ق (أ ج ه) = ق (أ د ه) ١ $\therefore \angle ADE = \angle AHE$ ق (أ ج ه) = ق (أ و ب) ٢

(لأنهما محيطيتان مشتركتان في القوس أ ب)

من ١، ٢: $\therefore \angle ADE = \angle AHE$ ق (أ و ب) \therefore الشكل د ب و ه رباعي دائري

أ ب ج د شكل رباعي فيه

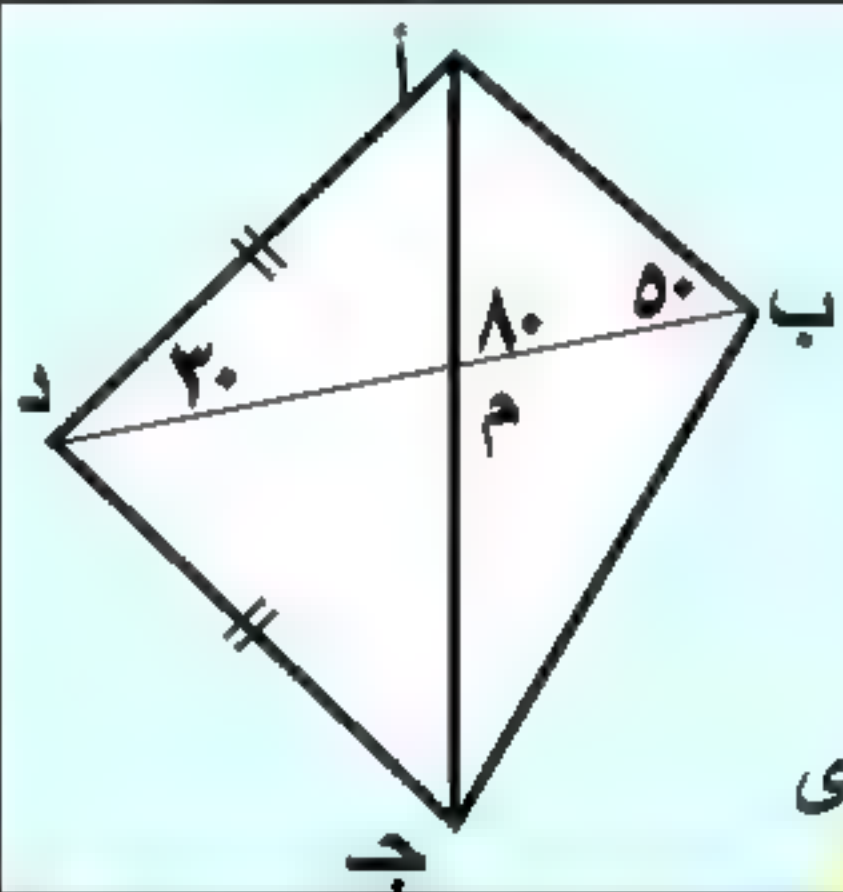
 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

اثبت أن

الشكل أ ب ج د رباعي دائري

الحلق (ب ه ج) = $180 - 76 = 104$ في $\triangle BHE$:ق (ب ج ه) = $180 - (104 + 38) = 38$ $\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ $\therefore \angle ADE = \angle AHE$ ق (د أ ج) = ق (ب أ ج) بالتبادل $\therefore \angle ADE = \angle AHE$ ق (د أ ج) = ق (د ب ج)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة د ج

 \therefore الشكل أ ب ج د رباعي دائري

أ ب ج د شكل رباعي

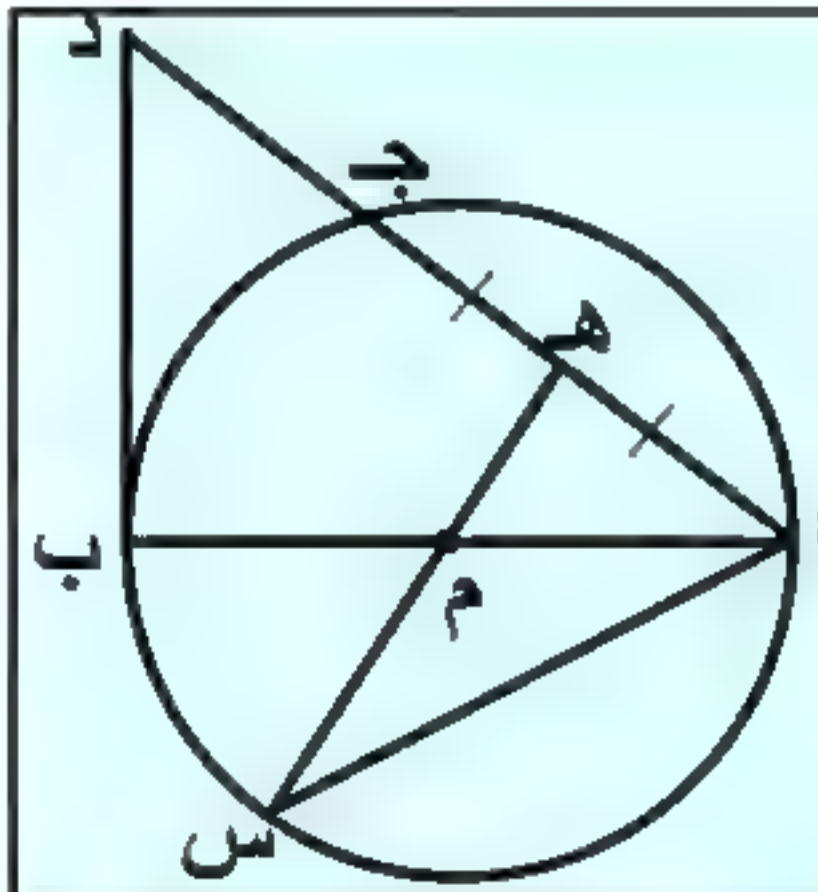
د أ = د ج

اثبت أن:

الشكل أ ب ج د رباعي دائري

الحل $\therefore \angle AMB = 180 - \text{زاوية مستقيمة}$ $\therefore \angle AMB = 180 - 80 = 100$ في $\triangle AMB$:ق (م أ د) = $180 - (30 + 100) = 50$ $\therefore \angle AMB = \angle CMD$ $\therefore \angle AMB = \angle CMD$ ق (د أ ج) = ق (د ب أ) $\therefore \angle AMB = \angle CMD$ ق (د ب أ) = ق (د ب ج)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة أ د

 \therefore الشكل أ ب ج د رباعي دائري

أ ب قطر في الدائرة م

ه منتصف أ ج، د ب مماس

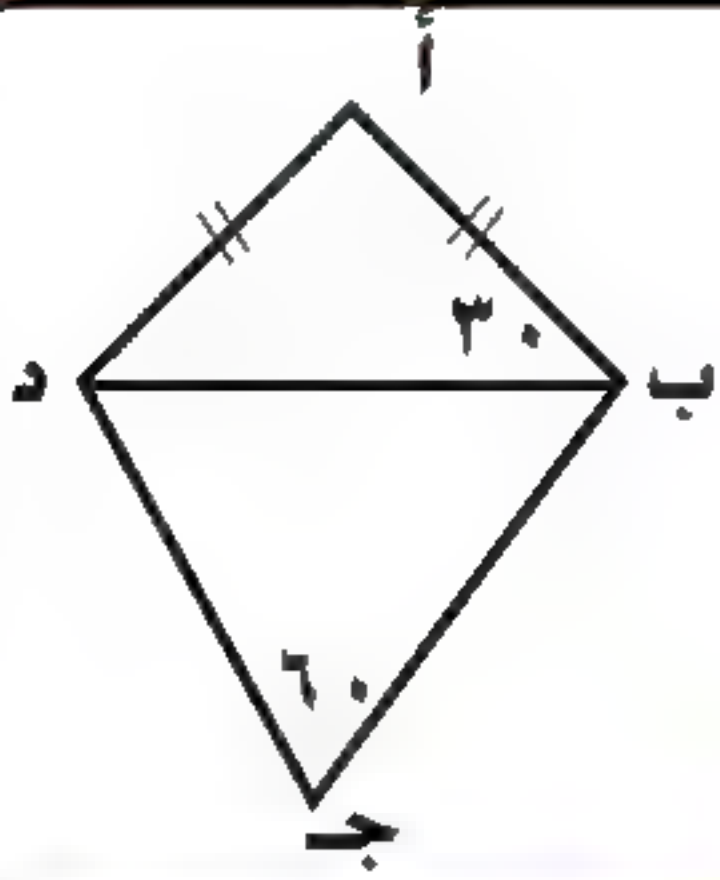
اثبت أن:

(١) م ب د ه رباعي دائري

(٢) ق (ب أ س) = $\frac{1}{4}$ ق (د)**الحل** $\therefore \overline{DB} \perp \overline{AB}$ ق (ب) = $90 - 1$ $\therefore \angle AMB = 90 - 1$ \therefore ه منتصف أ ج $\therefore \overline{MH} \perp \overline{AC}$ $\therefore \angle AMB = 90 - 2$

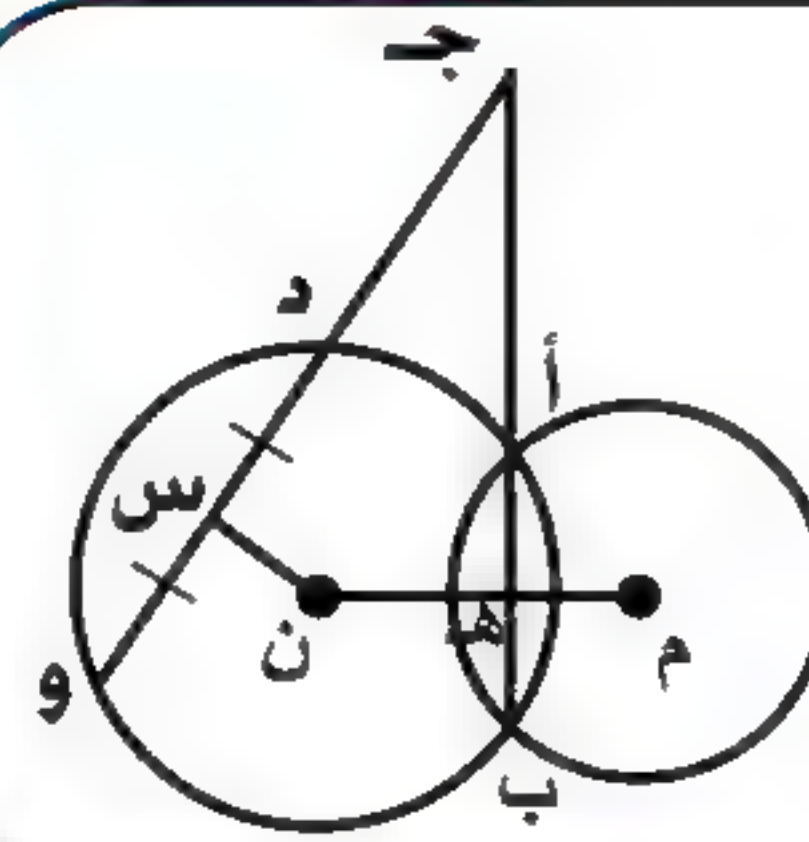
من ١، ٢ ينتج أن: ق (ب) = ق (م ه د)

 \therefore الشكل م ب د ه رباعي دائري $\therefore \angle AMB = \angle CMD$ ق (ب م س) الخارجة ٣ $\therefore \angle AMB = \angle CMD$ ق (ب م س) المركزية ٤من ٣، ٤: $\therefore \angle AMB = \angle CMD$ ق (ب أ س) = $\frac{1}{4}$ ق (د)



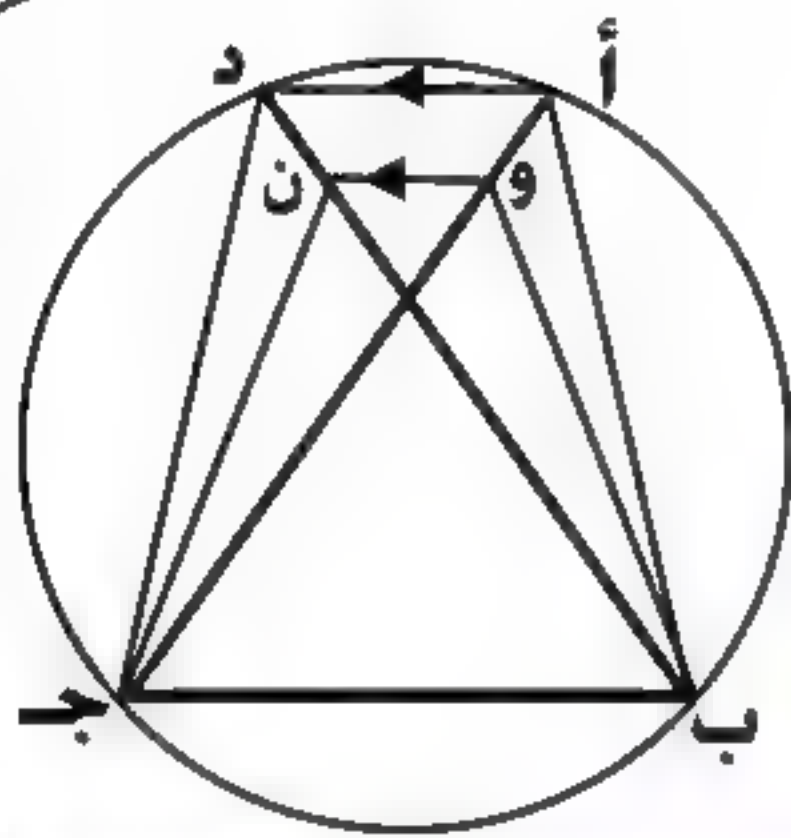
٢
أب = أد
ق (أ ب د) = ٣٠°
ق (ج د) = ٦٠°
اثبت أن : الشكل
أ ب ج د رباعي دائري

الحل



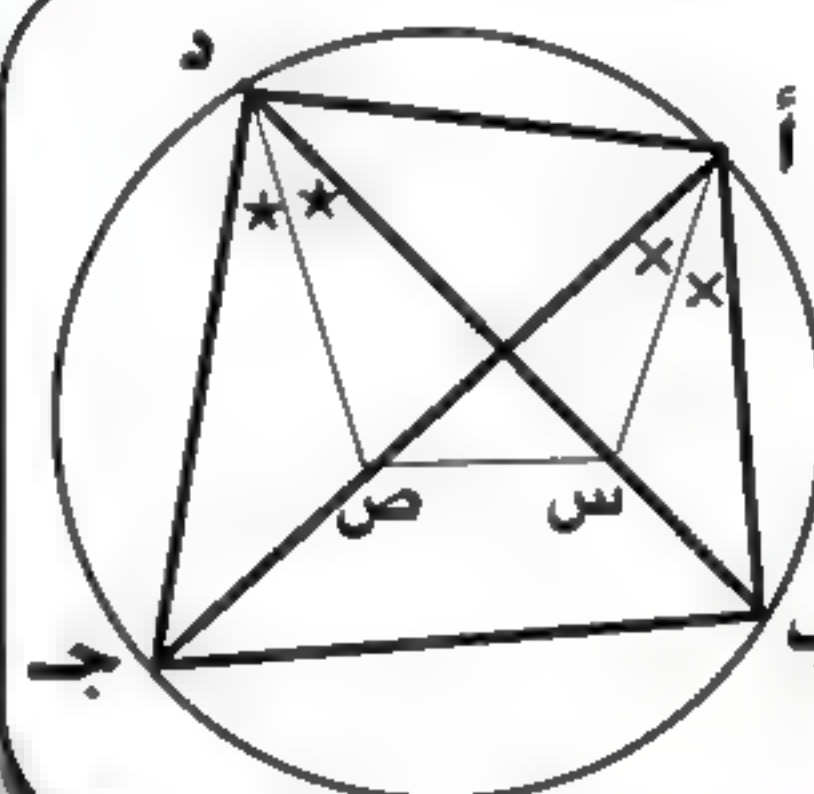
١
م ، دائرتان متقاطعتان
س منتصف د و
اثبت أن : الشكل
ج د ه ن س رباعي دائري

الحل



٤
أد // ون
اثبت أن :
(١) ب و ن ج رباعي دائري
(٢) ق (و ب ن) = ق (و ج ن)

الحل



٣
أ س ينصف د ب أ ج
د ص ينصف د ب د ج
اثبت أن : الشكل
(١) أ س ص د رباعي دائري
(٢) س ص // ب ج

الحل

تمارين

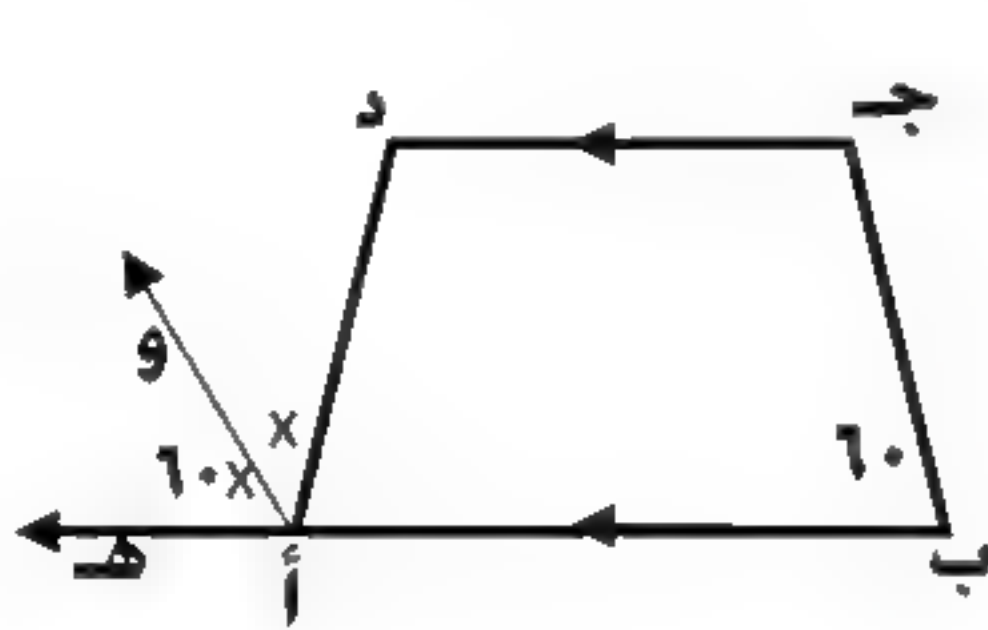
١ اذكر حالتين يكون فيهما الشكل الرباعي دائرياً

٦ أ ب ج د Δ مرسوم داخل دائرة ، س \in أ ب، ص \in أ ج بحيث: ق (أ س) = ق (أ ص)، ج س \cap أ ب = { د } ، ب ص \cap أ ج = { هـ }

اثبت أن: (١) الشكل ب ج د هـ رباعي دائري

(٢) ق (د هـ ب) = ق (س أ ب)

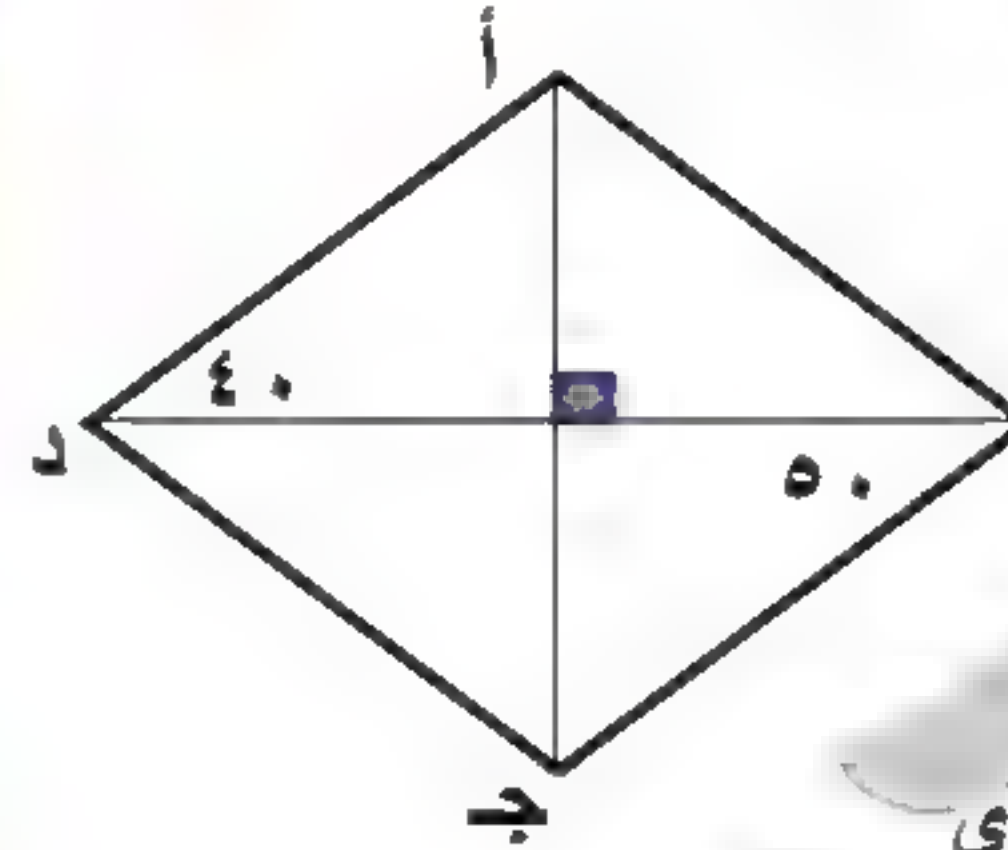
٧ في الشكل المقابل:



ج د // ب هـ
أو ينصف د د أ هـ
ق (و أ هـ) = ٦٠°
ق (ب) = ٦٠°

اثبت أن: الشكل أ ب ج د رباعي دائري

٢ في الشكل المقابل:



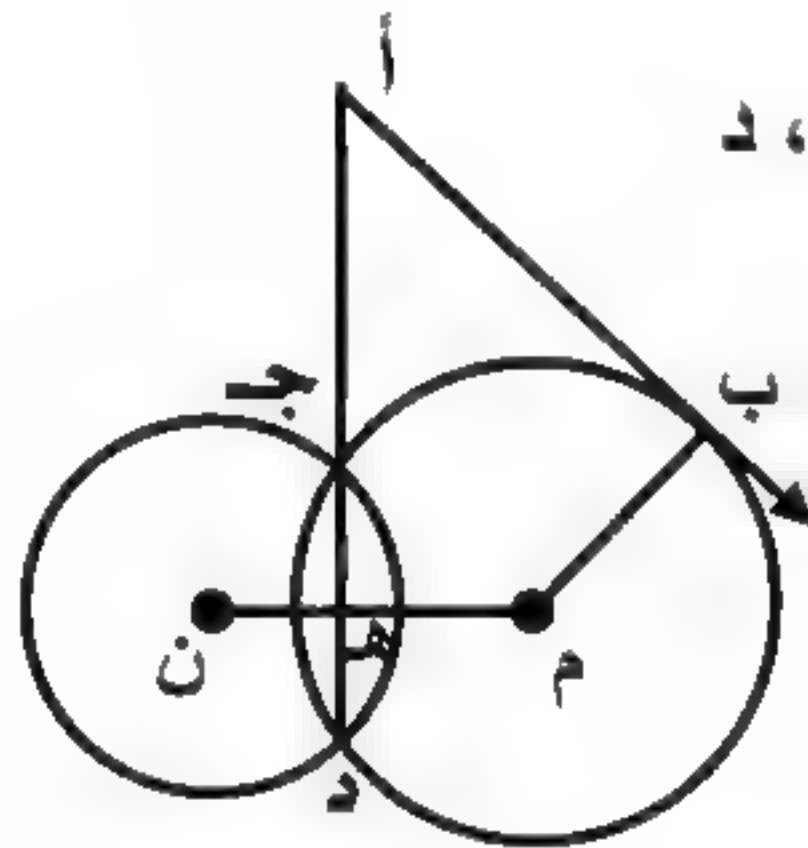
أ ب ج د شكل رباعي

أ ج \perp ب د

بؤهن أن:

الشكل أ ب ج د رباعي دائري

٨ في الشكل المقابل:



م ، ن دائرتان متقاطعتان في ج د ، د

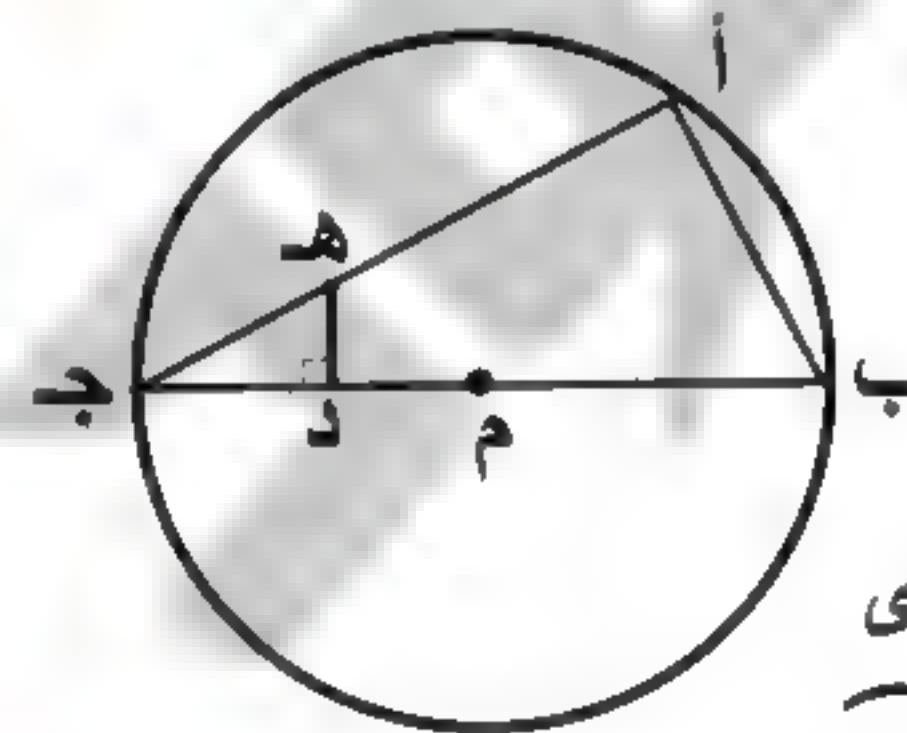
أ ب مماس للدائرة م عند ب

م ن \cap ج د = { هـ }

اثبت أن:

الشكل أ ب م هـ رباعي دائري

٣ في الشكل المقابل:



ب ج قطر في الدائرة م

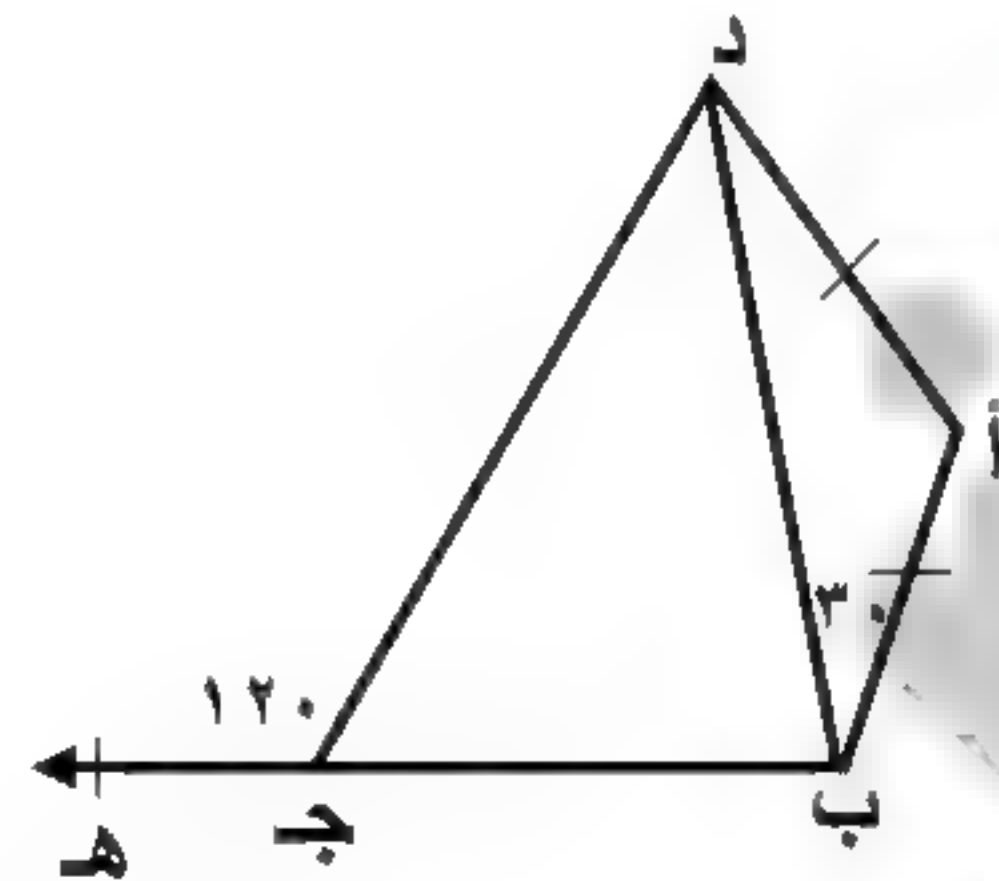
هـ د ب ج

اثبت أن:

(١) الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

(٢) ق (د هـ ج) = $\frac{1}{4}$ ق (أ ج)

٩ في الشكل المقابل:



أ د = أ ب

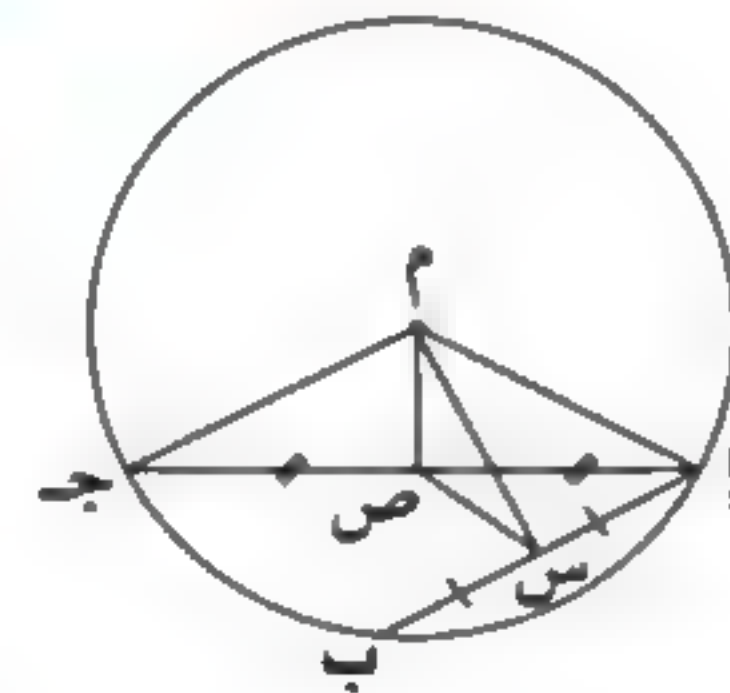
ق (أ ب د) = ٣٠°

ق (د ج هـ) = ١٢٠°

اثبت أن: الشكل

أ ب ج د رباعي دائري

٤ في الشكل المقابل:



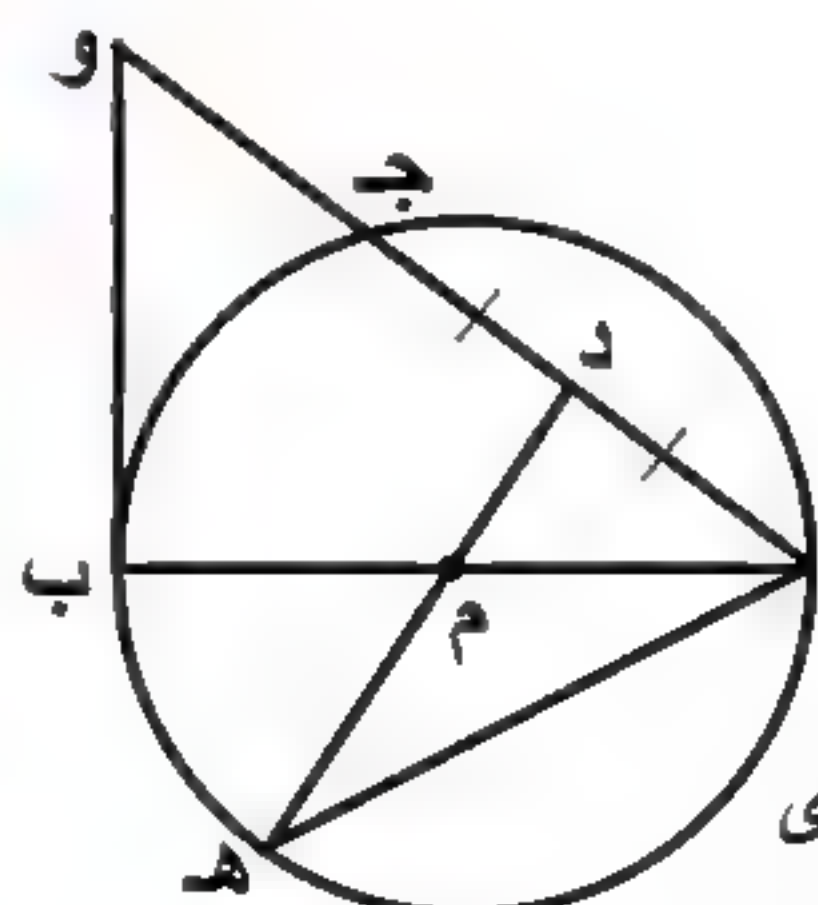
س ، ص منتصفا أ ب ، أ ج

على الترتيب

اثبت أن:

أ س ص م رباعي دائري

١٠ في الشكل المقابل:



أ ب قطر في الدائرة م

د منتصف أ ج

ب و مماس

اثبت أن: (١) م ب و د رباعي دائري

(٢) ق (و) = ٢ ق (هـ)

الدائرة م \cap الدائرة ن = { أ ، ب }

ب ج د

ج س \cap د ص = { هـ }

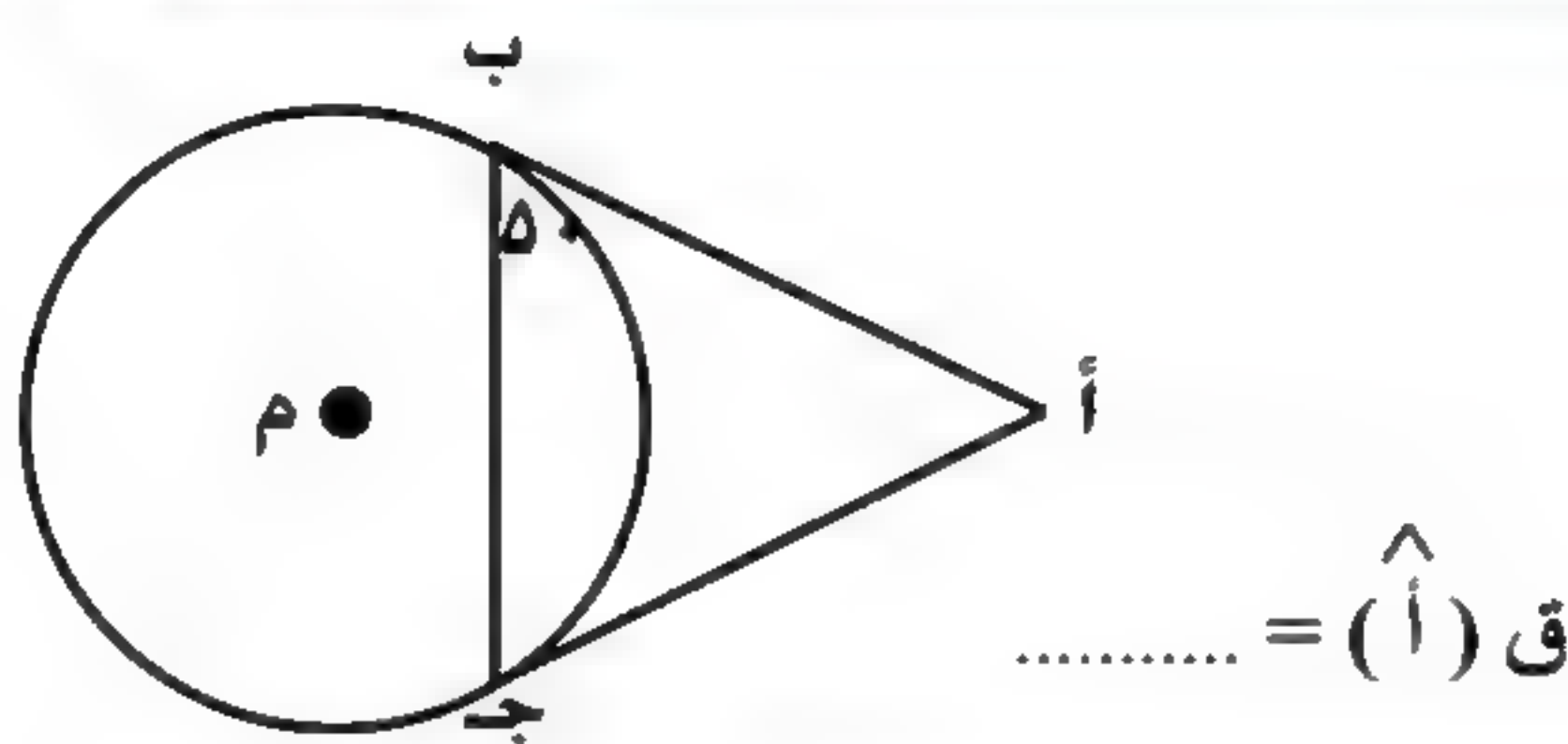
اثبت أن

الشكل أ س هـ ص رباعي دائري

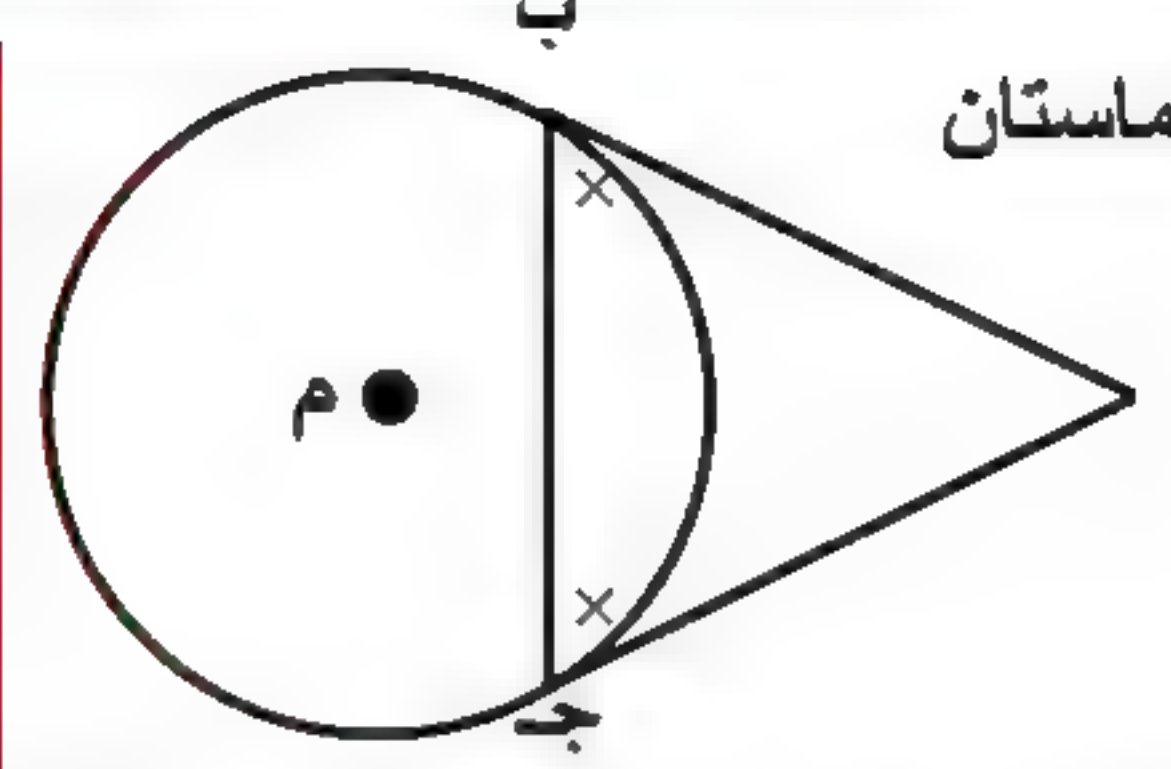
العلاقة بين مماسات الدائرة

الدرس
السابع 7

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان في الطول.



ق (أ) = = ق (أ)

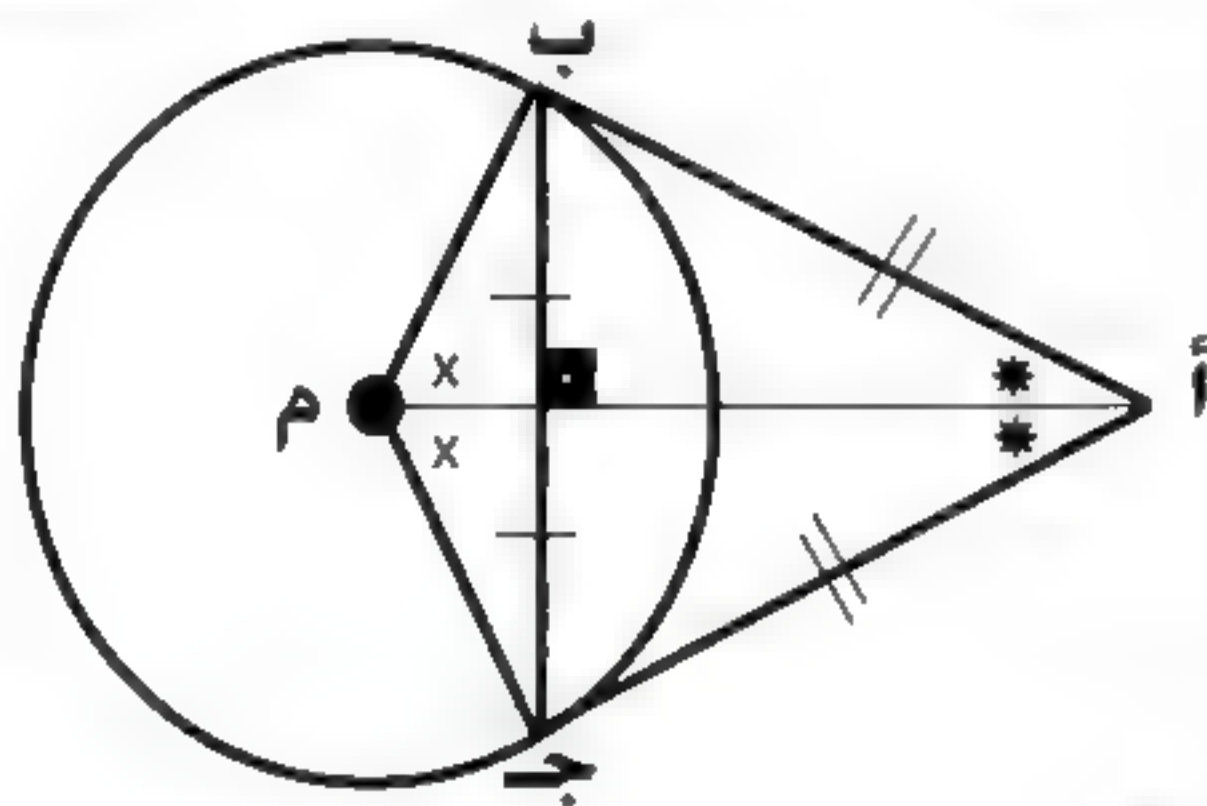


∴ أ ب ، أ ج قطعتان مماستان

∴ أ ب = أ ج

Δ متساوي الساقين

∴ ق (ب) = ق (ج)



♦ م أ ينصف زاوية أ

♦ م أ ينصف زاوية م

♦ م أ ينصف الوتر ب ج

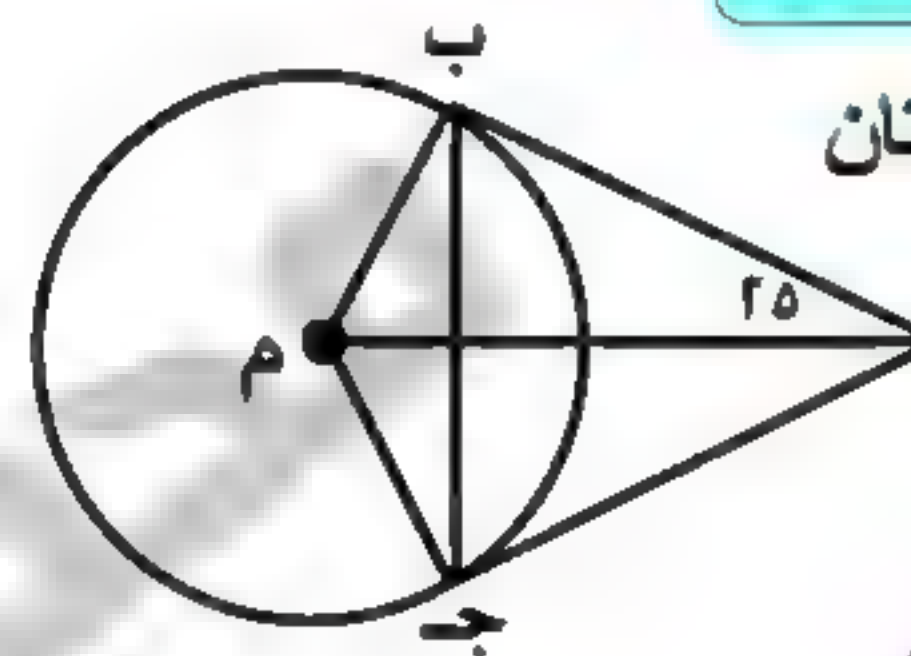
♦ م أ عمودي على الوتر ب ج

الخلاصة : م أ ينصف زاويتي و

ملاحظة

تصميم
معلم رياضيات
محمود عوض م

مثال ١



أ ب ، أ ج قطعتان مماستان

ق (ب أ ج) = ٢٥°

أوجد : ق (ب م ج)

الحل

∴ أ ب مماسة ، ب م نصف قطر ∴ ق (أ ب م) = ٩٠°

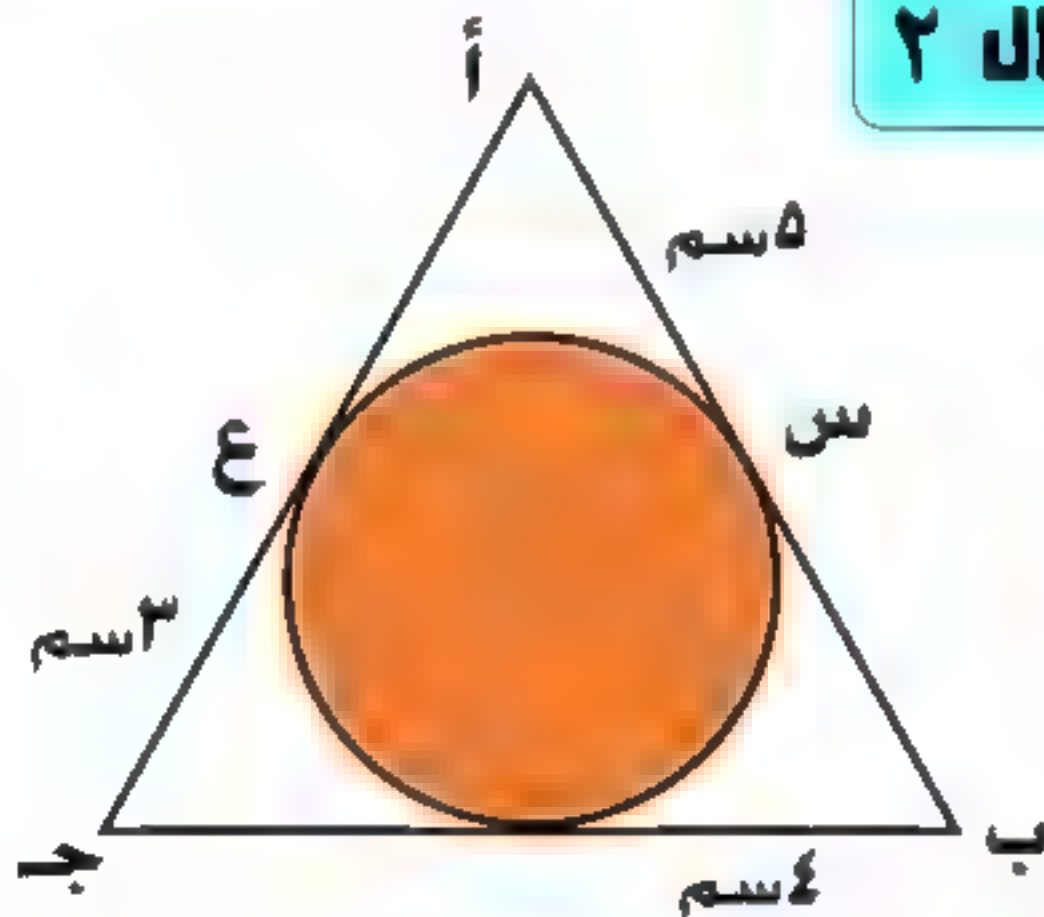
في Δ أ ب م :

ق (أ م ب) = ١٨٠ - (٩٠ + ٣٥) = ٥٥°

∴ م أ ينصف ∠ ب م ج

∴ ق (ب م ج) = ٢ × ٥٥ = ١١٠°

مثال ٢



Δ أ ب ج يمس الدائرة

من الخارج في س ، ص ، ع

أ س = ٥ سم ، ب ص = ٤ سم

ج ع = ٣ سم

أوجد محيط Δ أ ب ج

الحل

أ س = أ ع = ٥ سم قطعتان مماستان

ب ص = ب س = ٤ سم قطعتان مماستان

ج ع = ج ص = ٣ سم قطعتان مماستان

أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، ب ج = ٣ + ٤ = ٧ سم

أ ج = ٣ + ٥ = ٨ سم المحيط = ٩ + ٧ + ٨ = ٢٤ سم

عدد المماسات المشتركة

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماسيتين من الداخل ١

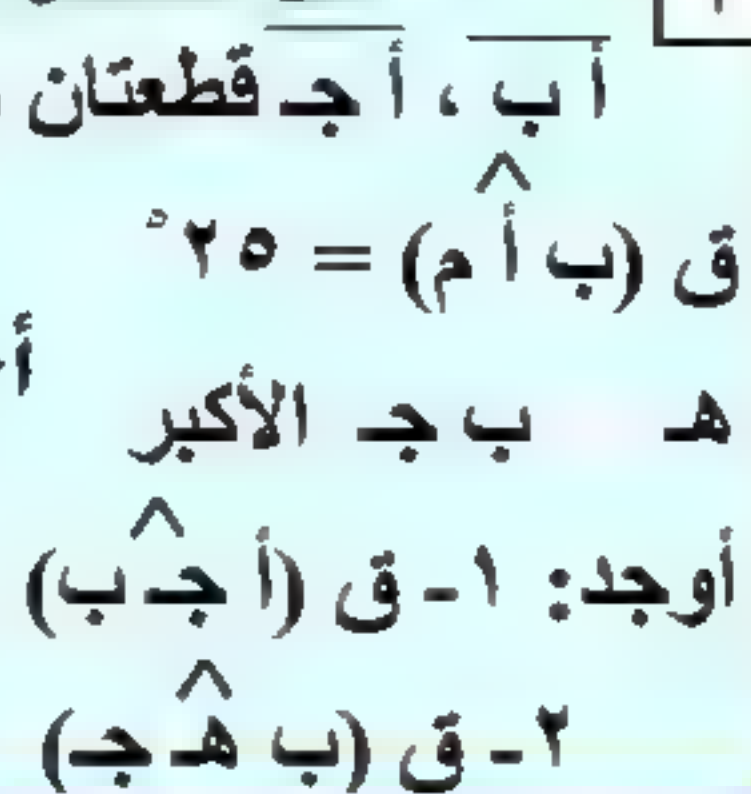
❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين ٤

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين المركز صفر

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماسيتين من الخارج ٣

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين صفر

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين ٢



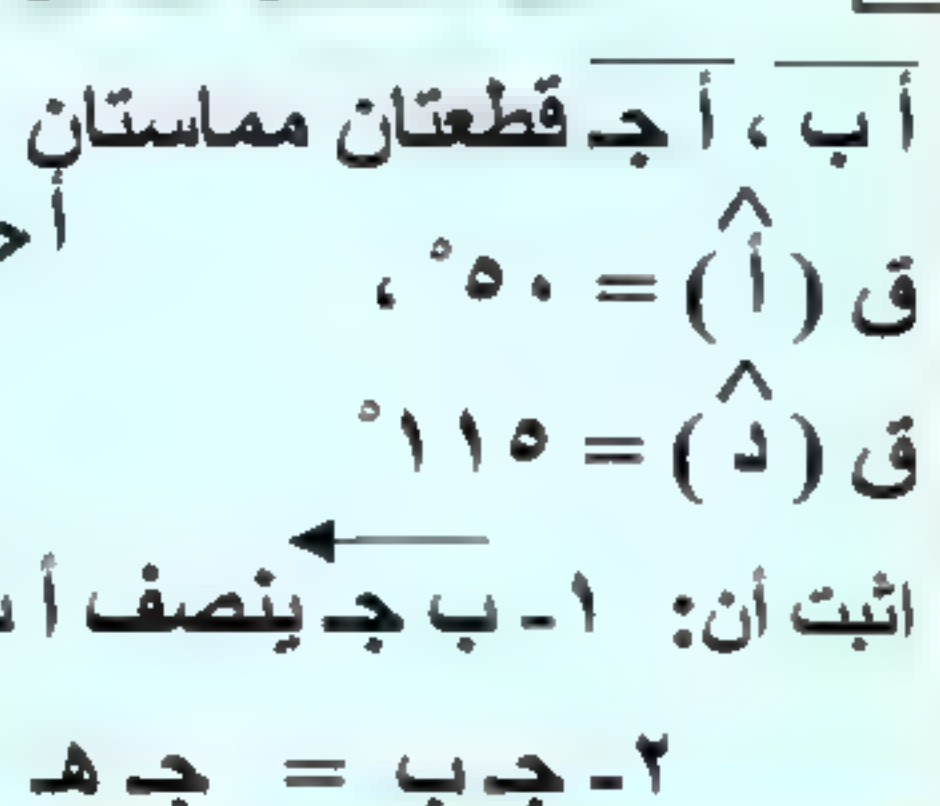

۲۱

فم ٨ ا ح ب : ق (أ ج ب) = $\frac{٥٠ - ١٨٠}{٢} = ٦٥$

كذلك : $\overline{أ ب}$ مماسة ، $\overline{م ب}$ نصف قطر
 : $\angle ق (أ ب م) = 90^\circ$
 : $\overline{م ب} \perp \overline{أ ب}$

$$130 = (90 + 90 + 50) - 360 = (\text{ج م ب})$$

∴ ق (ب هـ ج) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (ب م ج) المركزية = ٦٥°

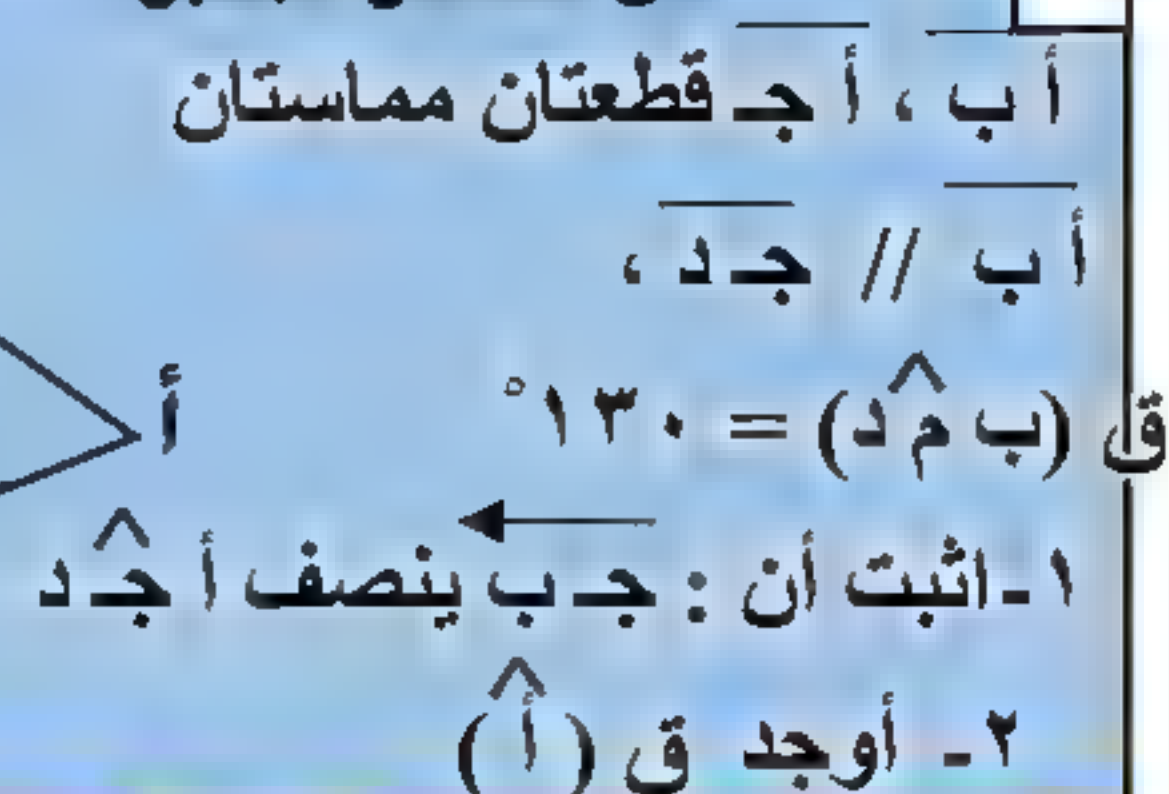


الحل

① ← $\therefore \text{بق (أب ج)} = \frac{50 - 180}{2} = 65$

∴ ق (ج ب هـ) = 115 - 180 = -65 ← (٢)

$\therefore \text{ق (أ ب ج) المماسية} = \text{ق (ج ه ب) المحيطية} \leftarrow (4)$
 من ٣ ، ٤ ينتج أن : $\text{ق (ج ب ه)} = \text{ق (ج ه ب)}$
 $\therefore \text{ج ب} = \text{ج ه}$ المطلوب الثاني



الحل

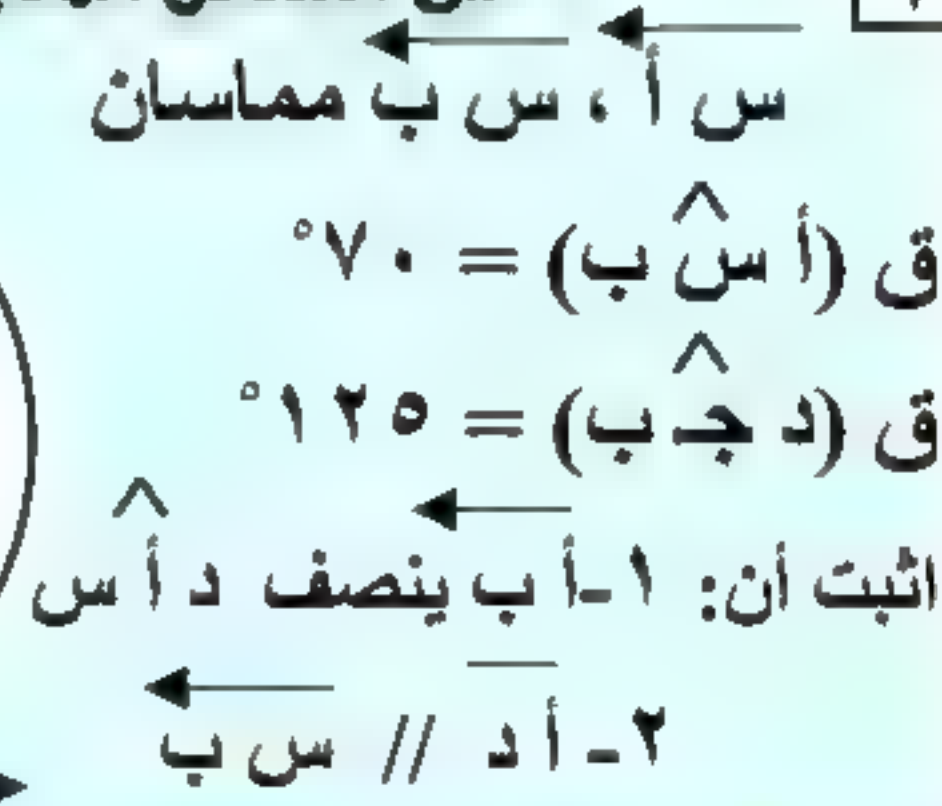
∴ ق(ب ج د) = ۶۵°

∴ ق (أ ب ج) = ق (ب ج د) = ٦٥ بالتبادل ← (١)

$$\therefore \text{ق (أ ب ج)} = \text{ق (أ ج ب)} = ٦٥ \leftarrow (٢)$$

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق (ب ج د) = ق (أ ج ب)

المطلوب الاول



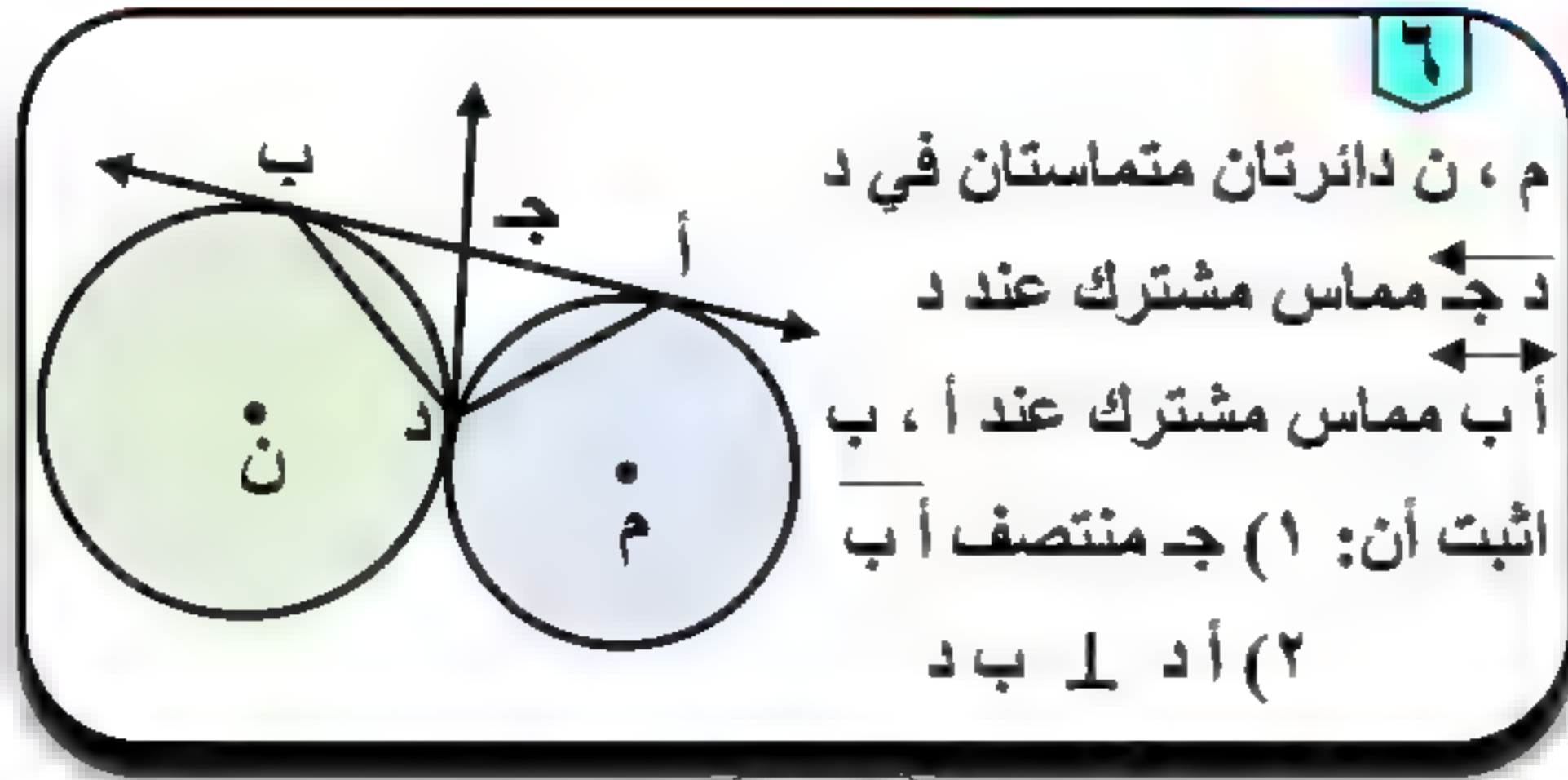
131

∴ ق (د أ ب) = ۱۸۰ - ۱۲۵ = ۵۵° ← (۱)

Δ. ∴ س أ ب متساوی الساقین

من ١ ، ٢ ينتج أن: $ق(د \text{ أ ب}) = ق(س \text{ أ ب})$
 :أ ب ينصف د أ س المطلوب الأول

∴ ق (د اُس) = ۵۵ + ۵۵ = ۱۱۰ °
 ∴ ق (د اُس) + ق (س) = ۱۱۰ + ۷۰ = ۱۸۰ ° وهما متداخلتان
 ∴ ا د // س ب ←



الحل

في الدائرة م :: ج د ، ج أ قطعان مماستان
:: ج د = ج أ (١)

في الدائرة ن :: ج د ، ج ب قطعان مماستان
:: ج د = ج ب (٢)

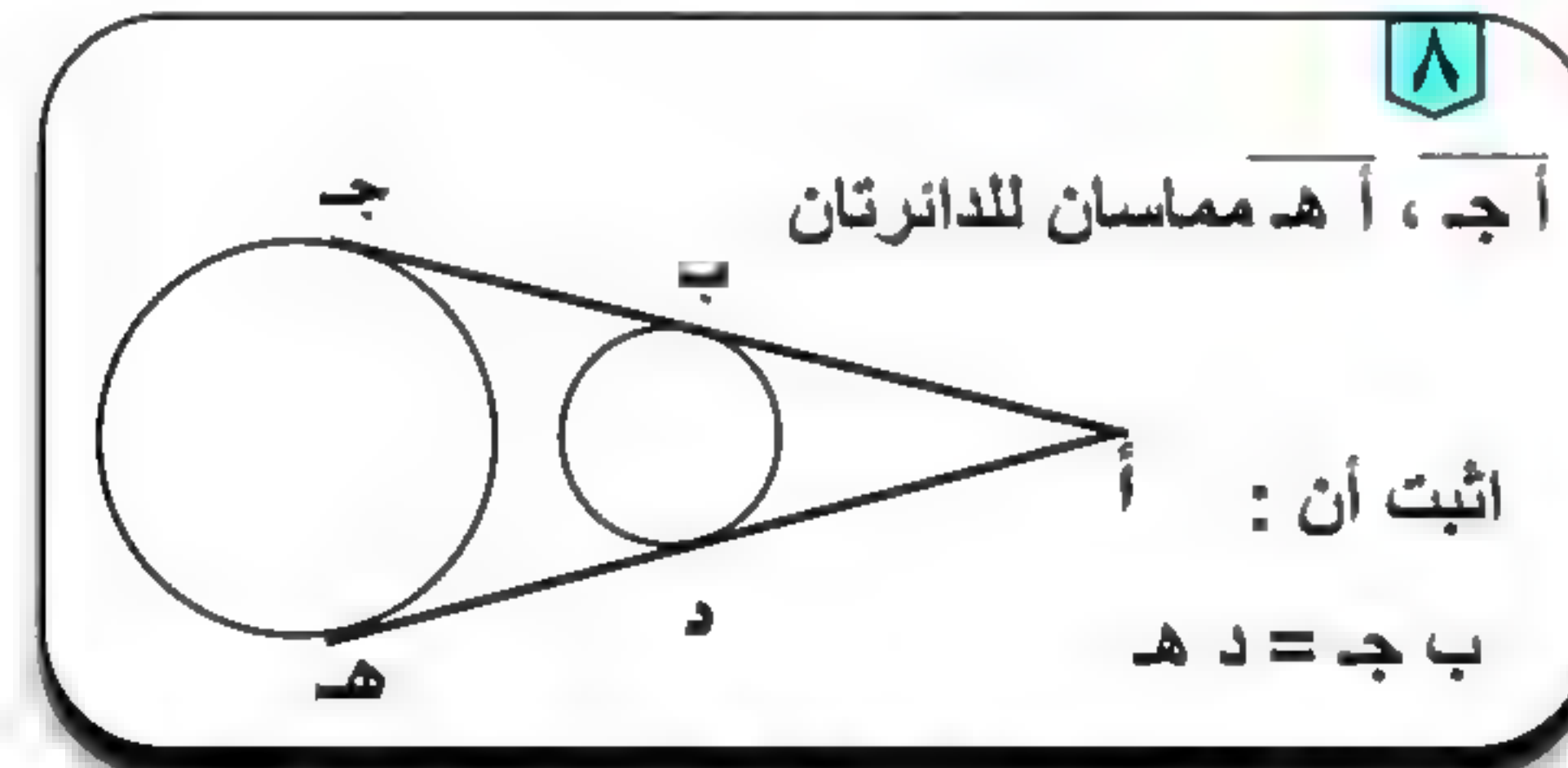
من ١ ، ٢ ينتج أن: ج أ = ج ب

:: ج منتصف أ ب المطلوب الأول

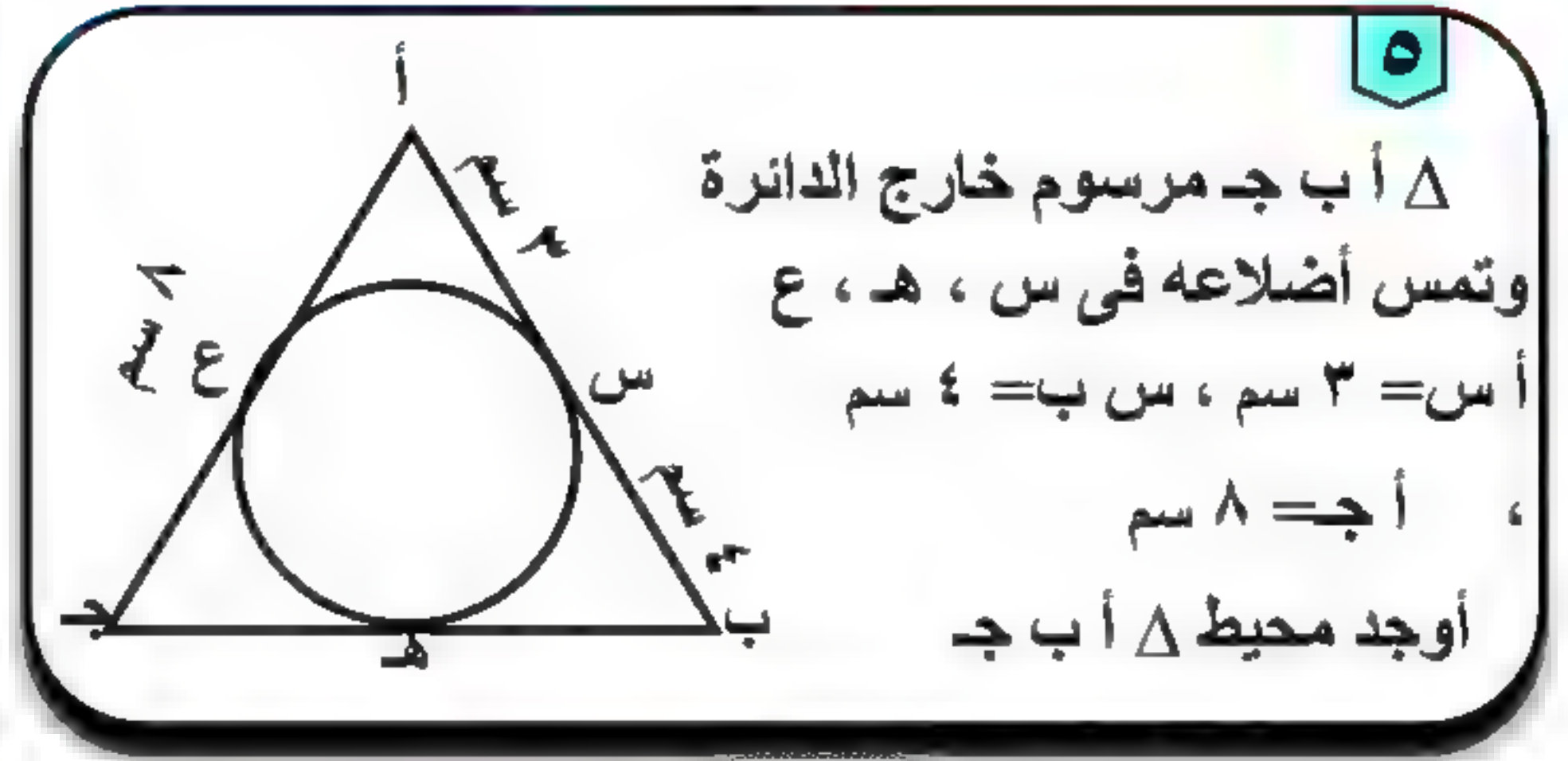
في $\triangle أ د ب$:: ج منتصف أ ب :: د ج متوسط

:: د ج = $\frac{1}{2}$ أ ب :: د ج خارج من زاوية قائمة

:: أ د \perp ب د المطلوب الثاني



الحل



الحل

:: أ س = أ ع قطعان مماستان

:: أ ع = ٣ سم

:: ع ج = ٨ - ٤ = ٤ سم

:: ج ع = ج ه قطعان مماستان

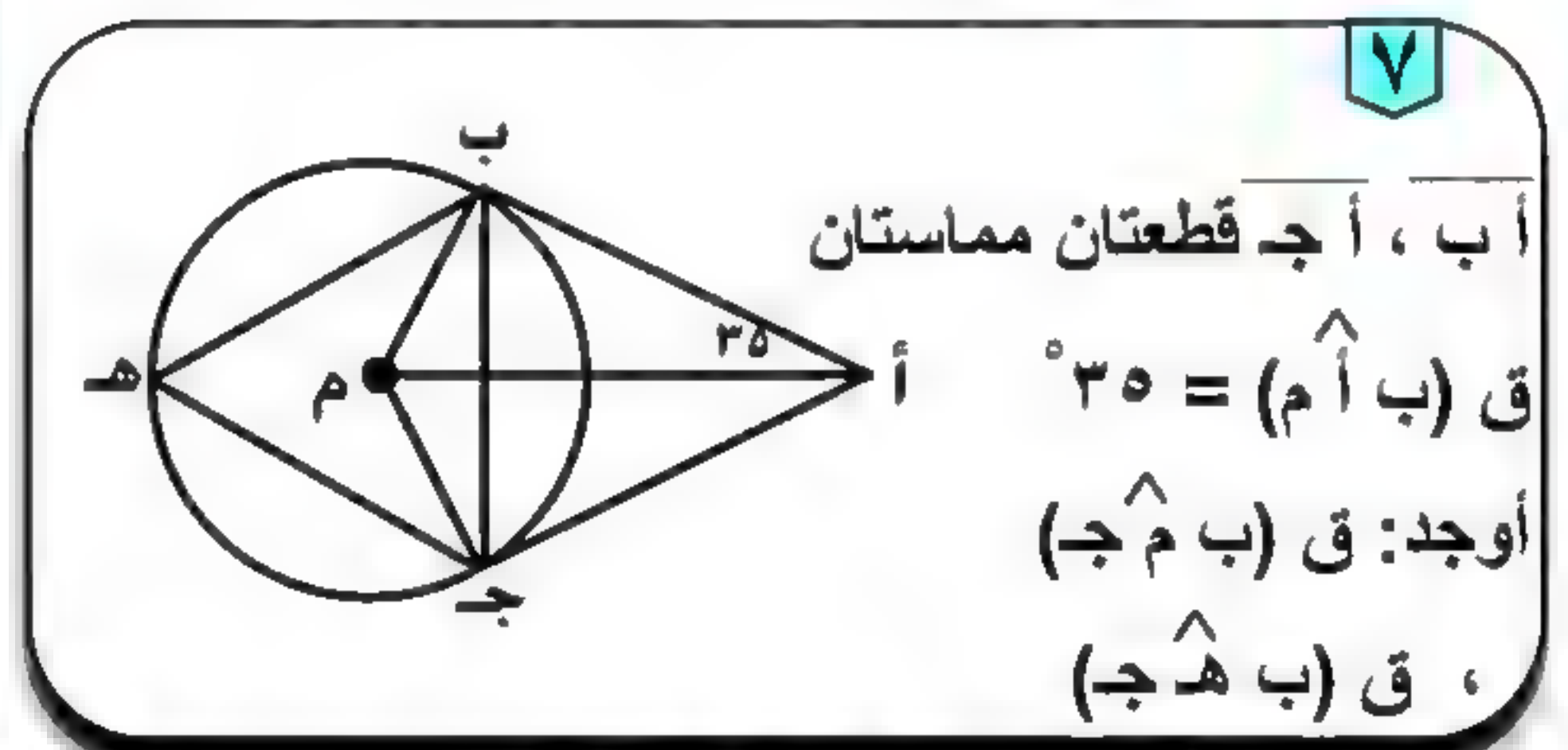
:: ج ه = ٥ سم

:: ب ه = ب س قطعان مماستان

:: ب ه = ٤ سم

:: ب ج = ٤ + ٥ = ٩ سم

:: محيط = ٩ + ٨ + ٧ = ٢٤ سم



الحل

تمارين

١ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج =

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٢ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتان هو

- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

٣ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل =

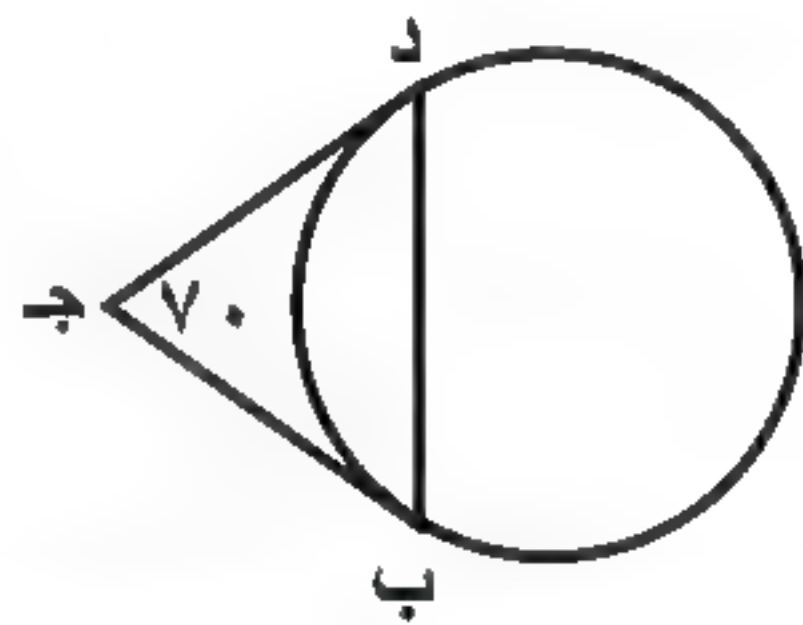
- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٤ المماسان المرسومان من نهايتي قطر في دائرة يكونان

- (أ) متوازيان (ب) منطبقان (ج) متقاطعان (د) متساويان في الطول

٥ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة يكونان

- (أ) متوازيتان (ب) متعامدتان (ج) متطابقتان (د) منطبقتان



٦ في الشكل المقابل : ج ب ، ج د قطعان مماستان

ق (ج) = ٧٠° فإن ق (د ب) الأصغر =°

- (أ) ٧٠ (ب) ١١٠ (ج) ١٢٥ (د) ٥٥

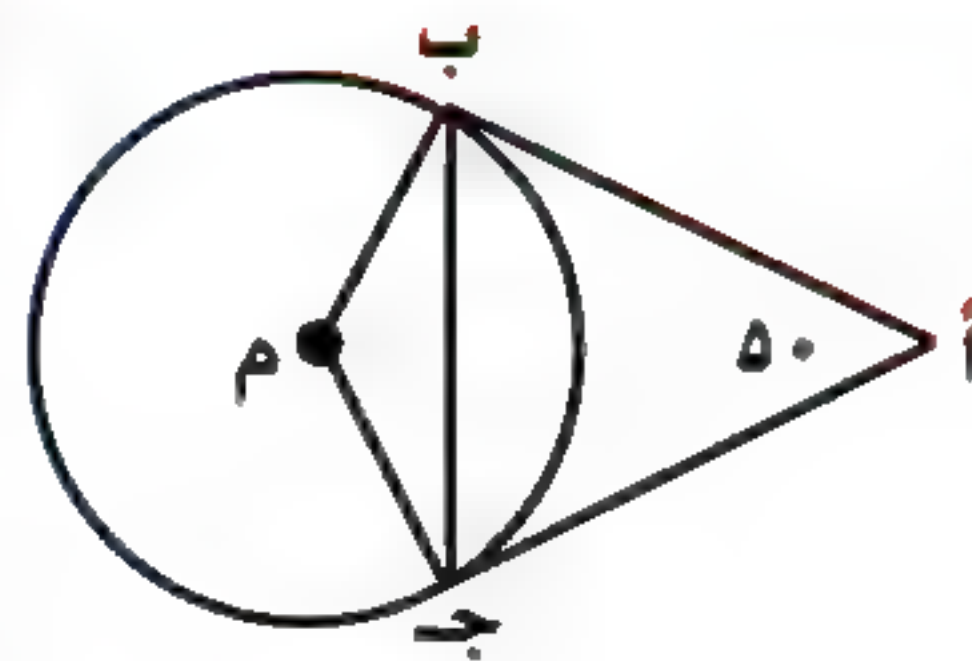
١ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ ج قطعان مماستان

ق (ب أ ج) = ٥٠°

أوجد : (١) ق (أ ب ج)

(٢) ق (م)



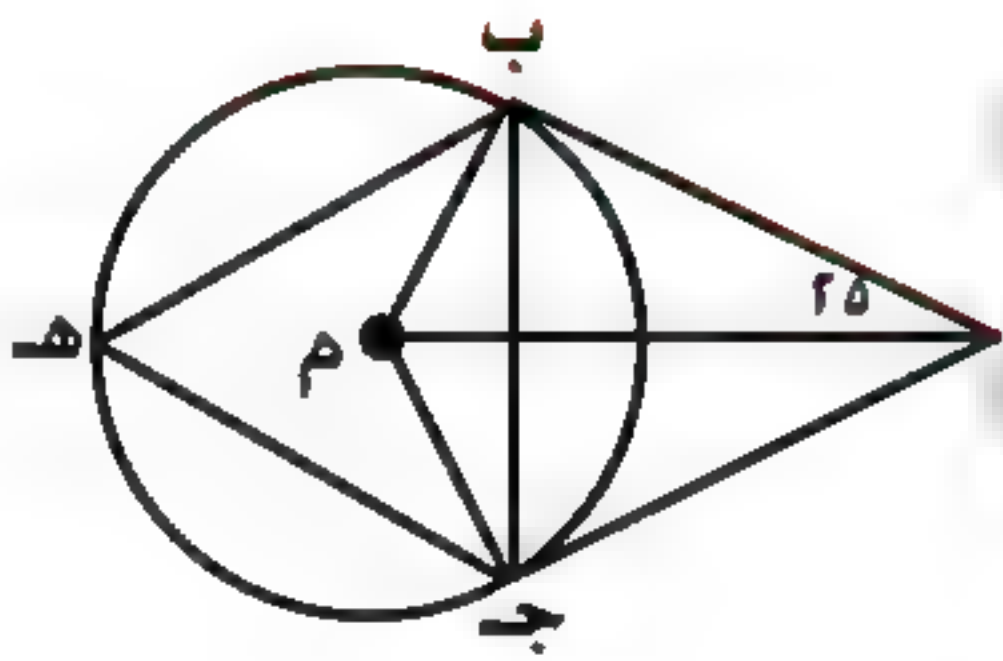
٢ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ ج قطعان مماستان

ق (ب أ م) = ٢٥°

أوجد : (١) ق (أ ب ج)

(٢) ق (ب هـ ج)



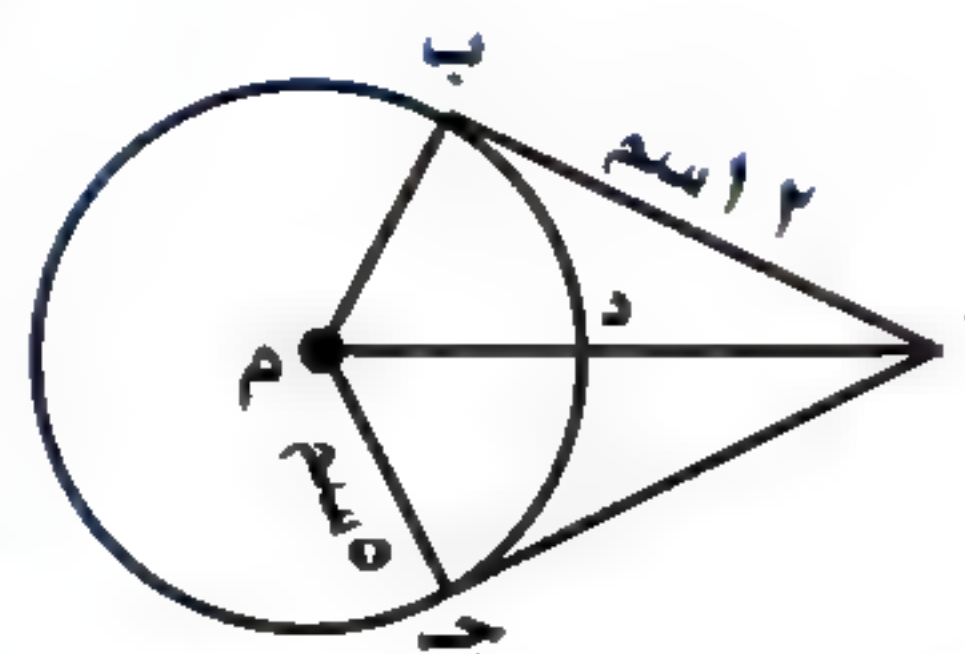
٢ في الشكل المقابل:

أ ج ، أ ب مماستان

أ ب = ١٢ سم

ج م = ٥ سم

أوجد طول: أ ج ، أ د



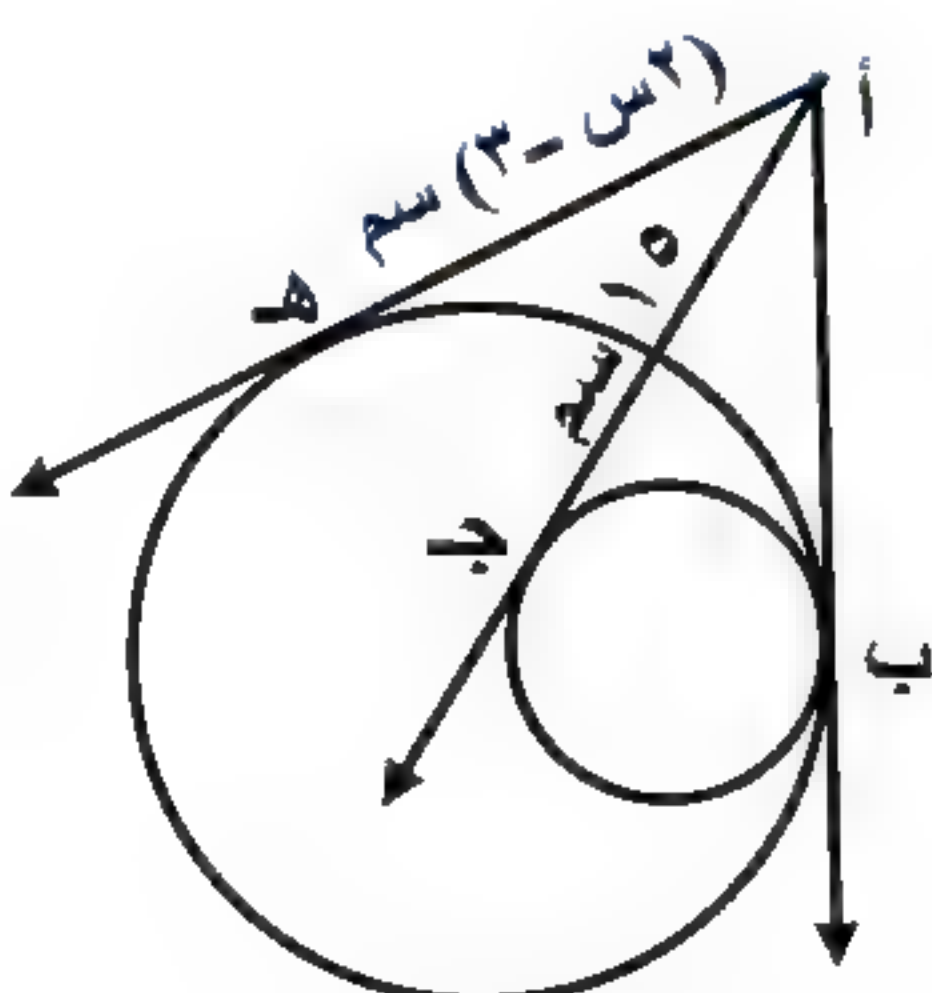
٤ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ ج ، أ هـ مماسات

أ ج = ١٥ سم

أ هـ = (٣ - ٢) سم

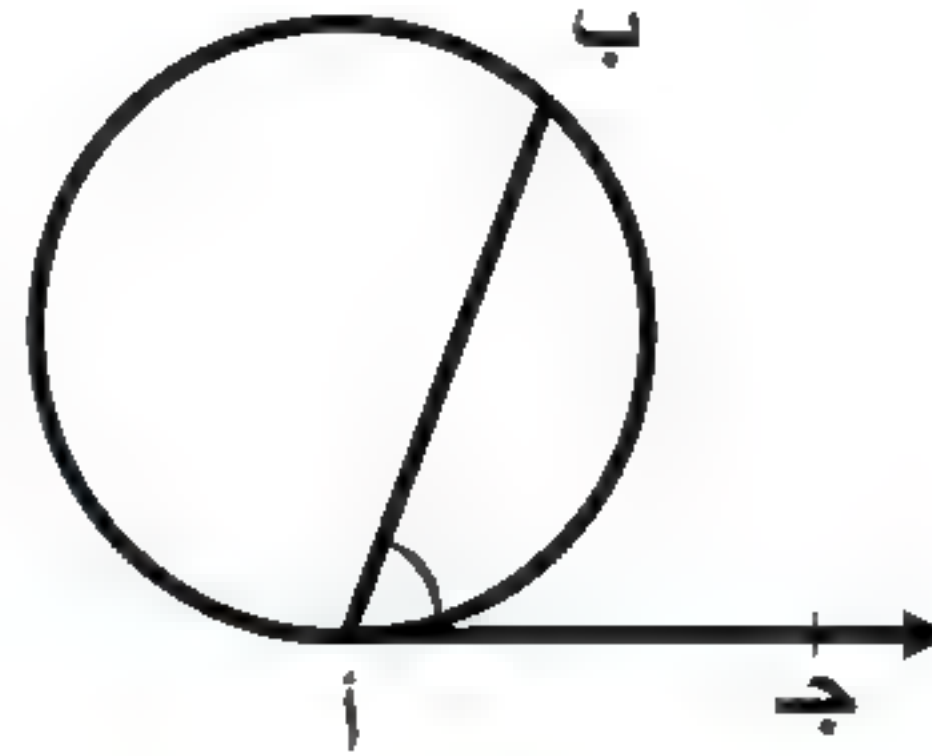
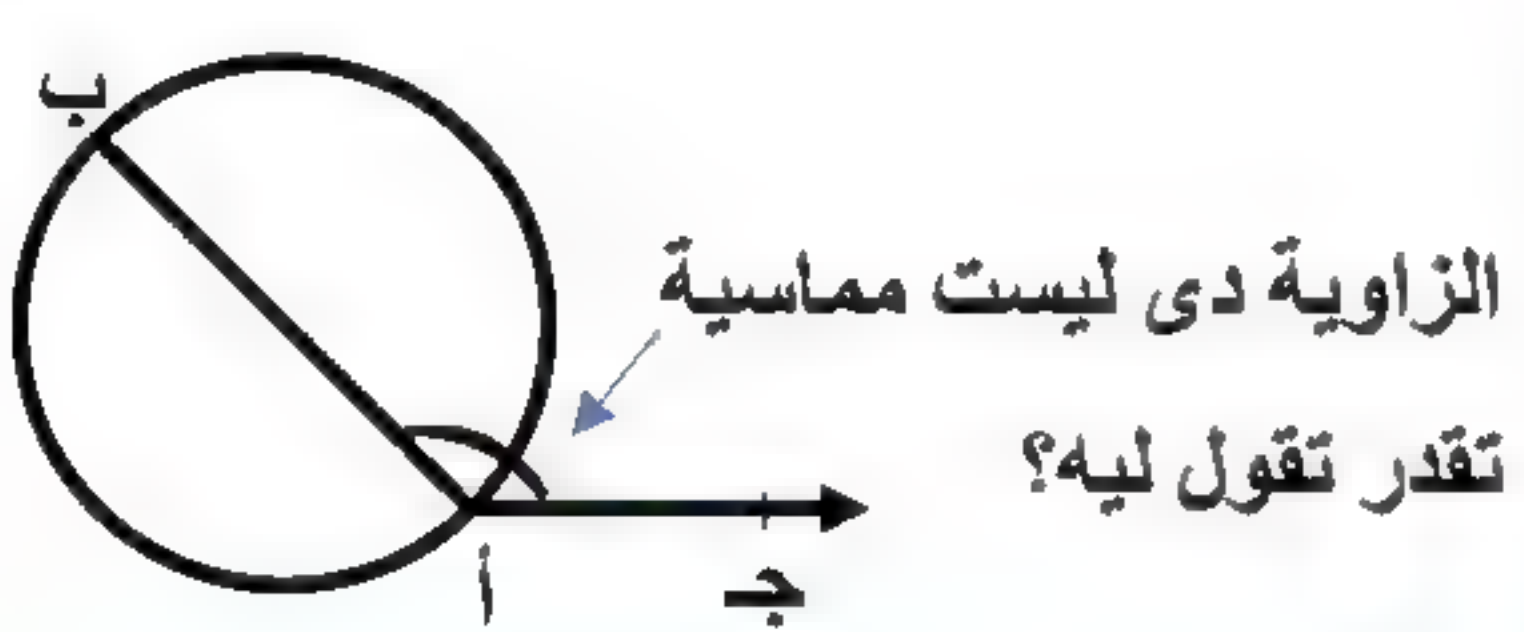
أوجد قيمة س



الزاوية المماسية

الدرس
الثامن 8

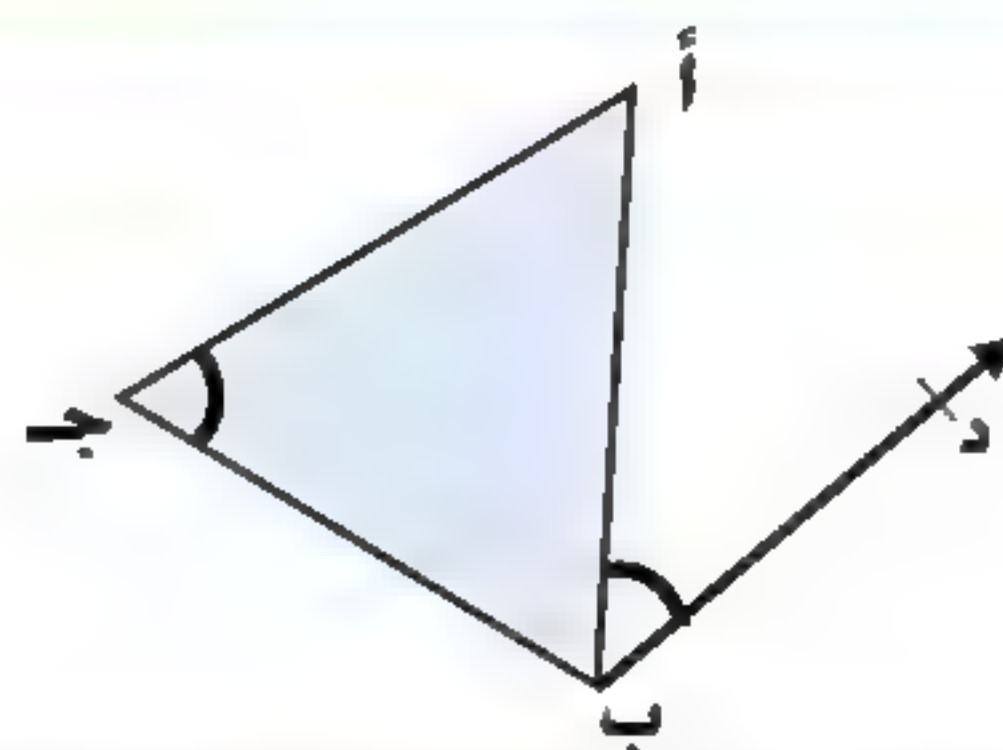
الزاوية المماسية هي زاوية رأسها على الدائرة ومحصورة بين وتر ومماس



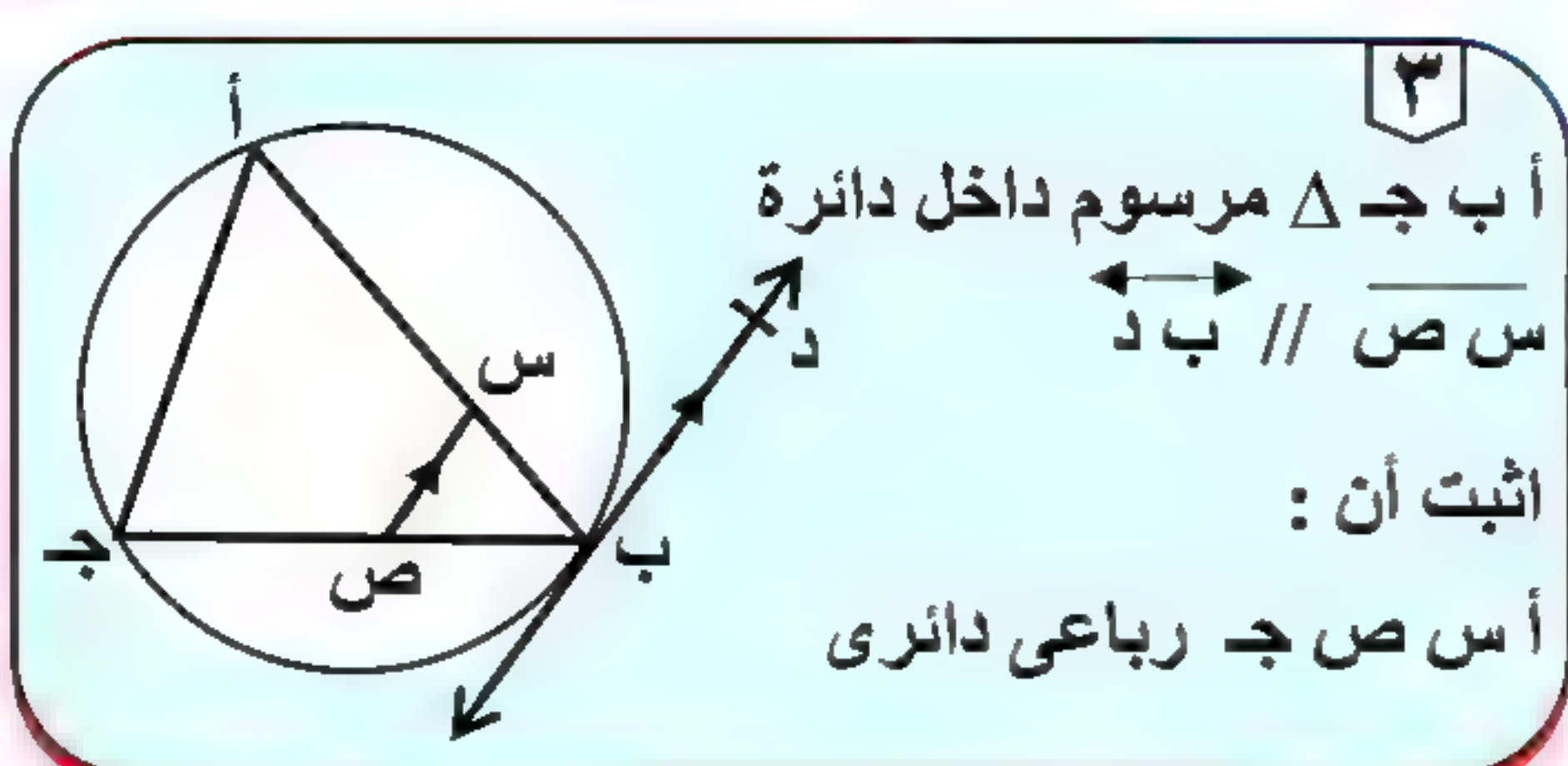
- ب أ ج زاوية مماسية
- القوس المقابل لها هو \widehat{AB}

قياس الزاوية المماسية = نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس	قياس الزاوية المماسية = قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس	قياس الزاوية المماسية = نصف قياس القوس المقابل لها زى المحيطية بالضبط
<p>ق (ج أ ب) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق (م) المركزية مشتركتان في ج أ ∴ ق (ج أ ب) = 49°</p>	<p>ق (ج أ ب) المماسية = ق (د) المحيطية مشتركتان في ج أ ∴ ق (ج أ ب) = 65°</p>	<p>ق (أ ب ج) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق (ب ج) ∴ ق (أ ب ج) = 70°</p>

لإثبات أن $\angle B$ معاس للدائرة التي تمر برؤوس $\triangle A B C$



نثبت أن :
ق (أ ب د) = ق (ج)



此

↑ ↓ —

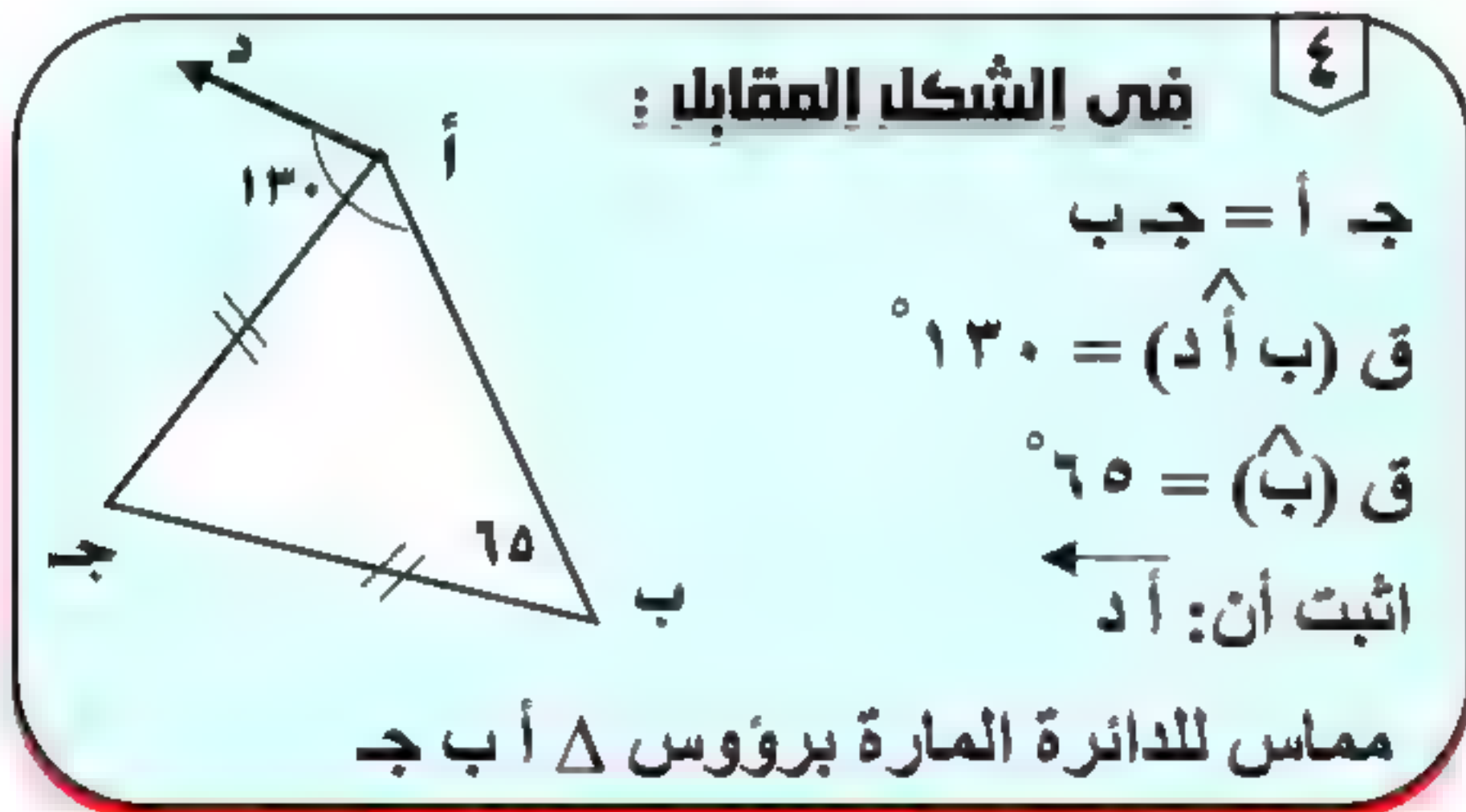
∴ ق (أ ب د) = ق (ص س ب) بالتبادل ← (١)

ق (أ ب د) المماسية = ق (ج) المحيطية ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (ص س ب) = ق (ج)

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة
 ∴ الشكل أس ص ج رباعي دائري



۱۲۱

ج = ج + ۱

∴ ق (جأب) = ق (ب) = ٦٥

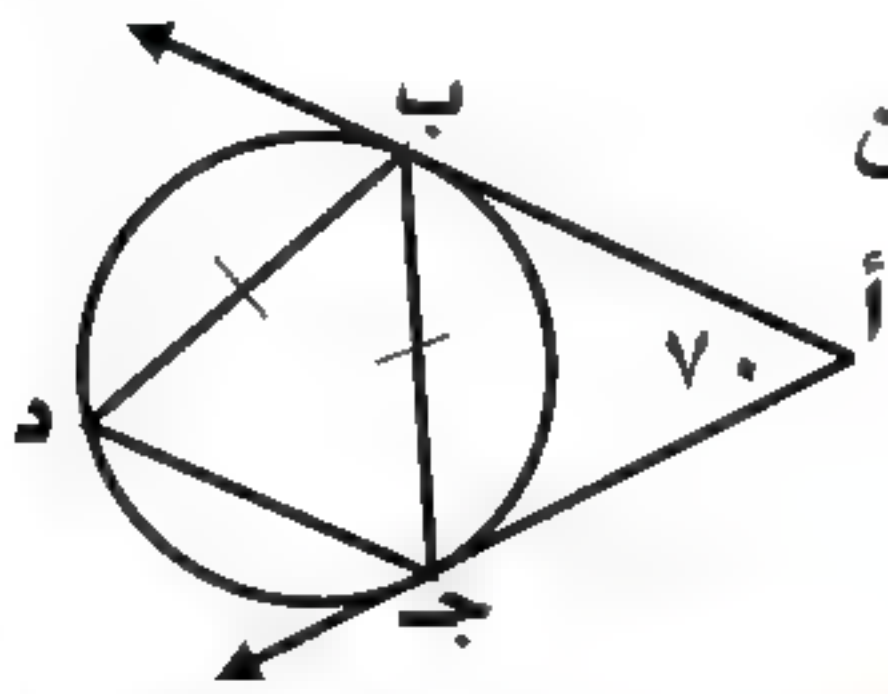
في الدائرة الكبرى :

$$\therefore \text{ق}(\hat{\text{د ا ج}}) = \text{ق}(\hat{\text{ب}})$$

∴ أ د مماس للدائرة المارة بـ Δ أ ب ج ←

∴ أ د مماس للدائرة المارة بـ Γ و Δ أ ب ج

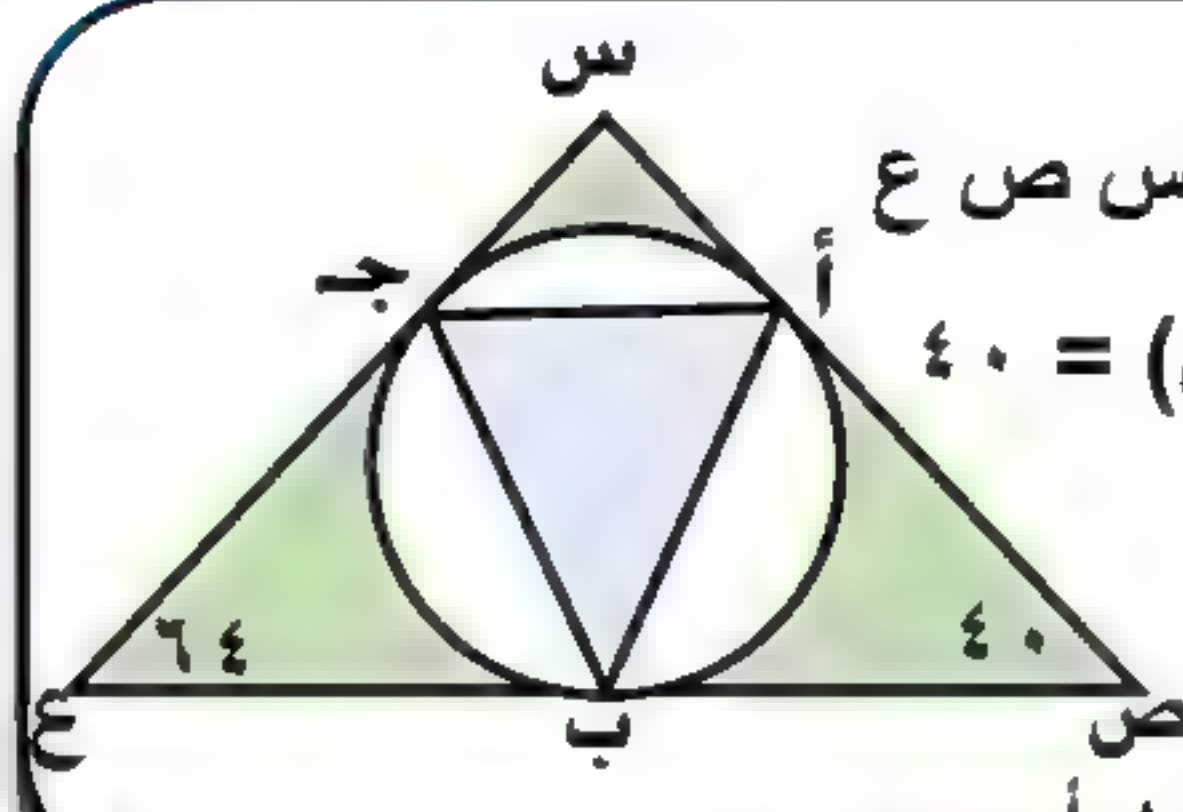
٢



أ ب ، أ ج قطعتان مماستان
 $ب ج = ب د$
 $ق (أ) = 70^\circ$
 أوجد: ق (أ ب د)

الحل

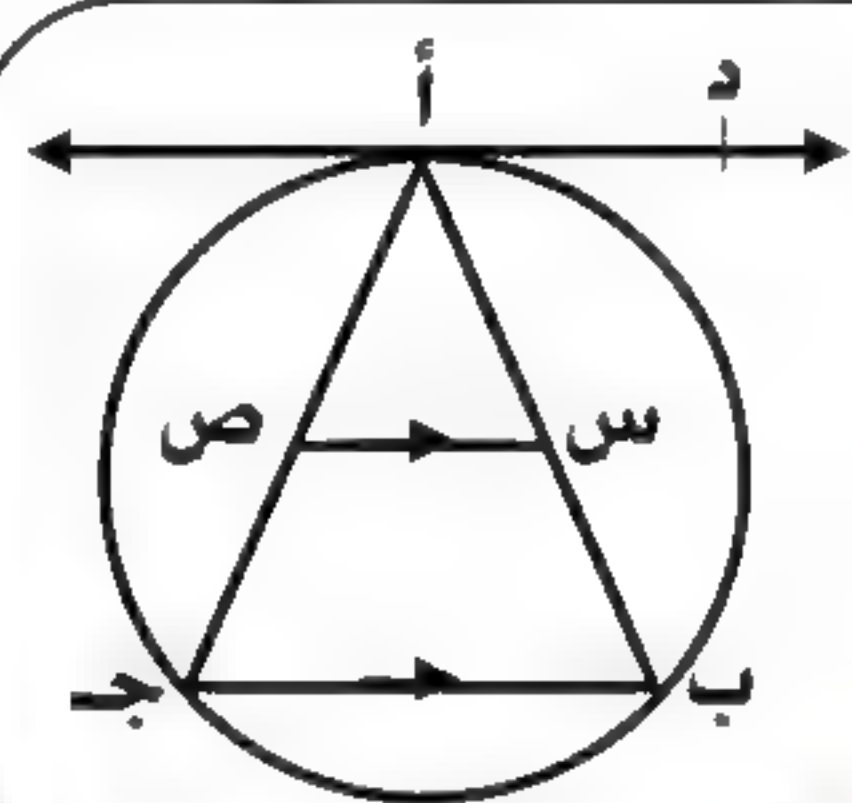
١



دائرة تماس أضلاع Δ س ص ع
 في أ ، ب ، ج ، ق (ص) $= 40^\circ$
 ق (ع) $= 64^\circ$
 أوجد قياسات زوايا Δ أ ب ج

الحل

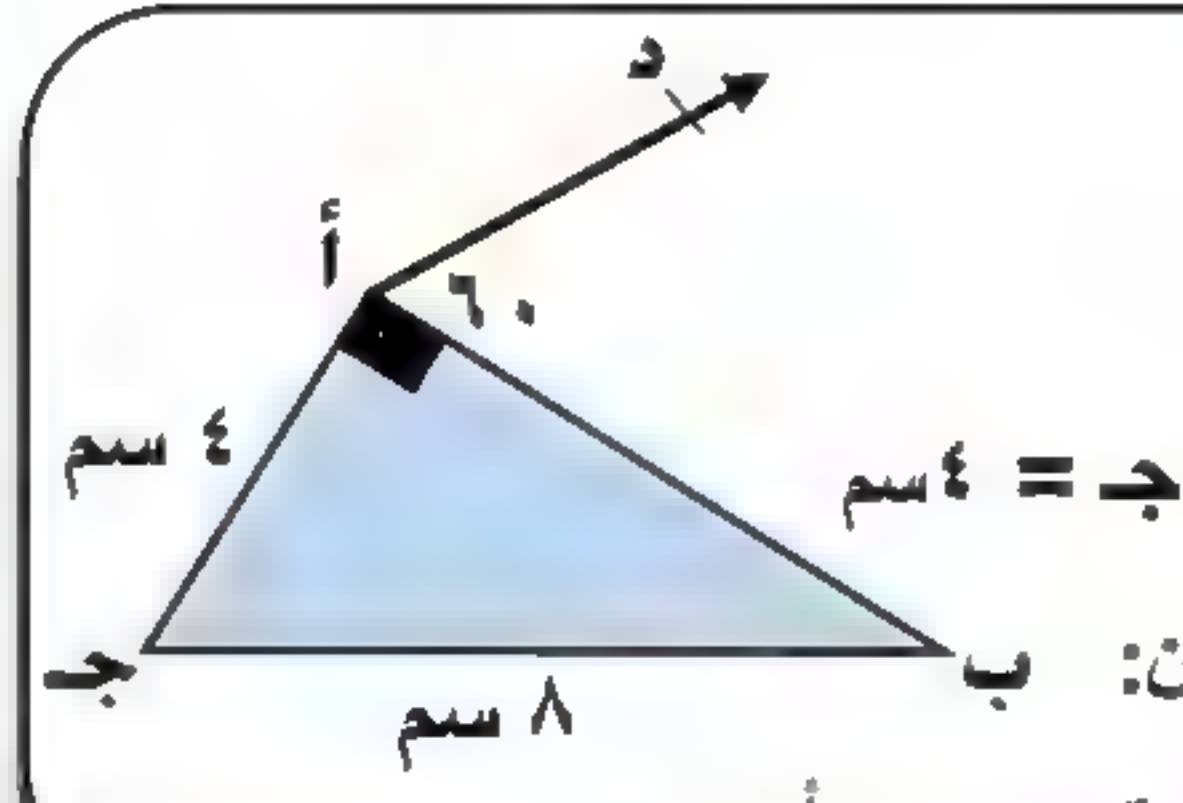
٤



أ ب ج Δ مرسوم داخل دائرة
 أ د مماس للدائرة
 $س ص // ب ج$
 اثبت أن: أ د مماس للدائرة
 المارة برؤوس Δ أ س ص

الحل

٣



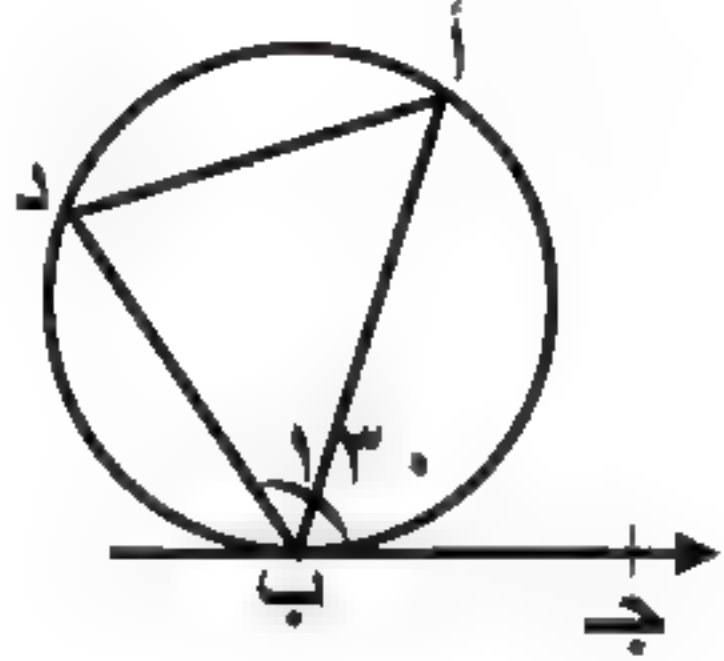
أ ب ج Δ قائم في أ
 ق (د أ ب) $= 60^\circ$ ، أ ج = ٤ سم
 ب ج = ٨ سم ، اثبت أن: أ د مماس للدائرة المارة برؤوس أ ب ج

الحل

اختر الإجابة الصحيحة:

1 الزاوية المماسية هي زاوية محصورة بين

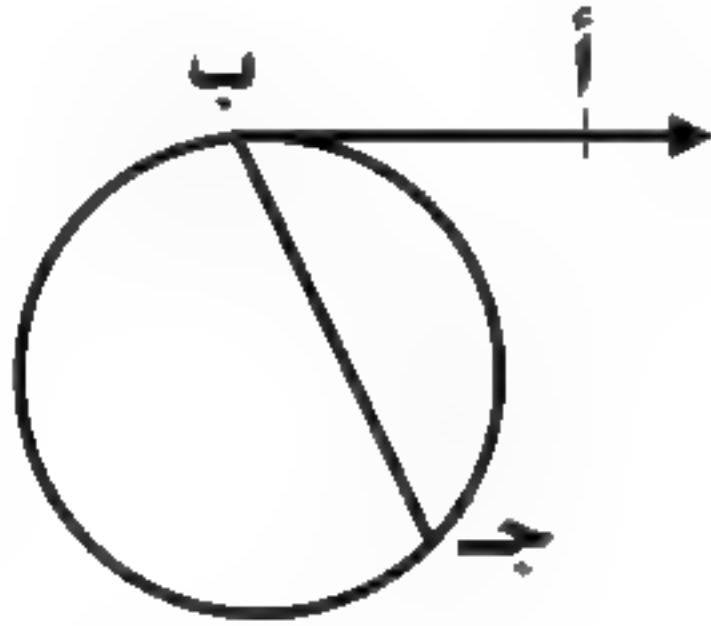
- (أ) وتران (ب) مماسان (ج) وتر ومماس (د) وتر وقطر



2 في الشكل المقابل : ب ج مماس للدائرة

ق (د ب ج) = 130° فإن ق (أ) =°

- (أ) 50 (ب) 65 (ج) 130 (د) 180



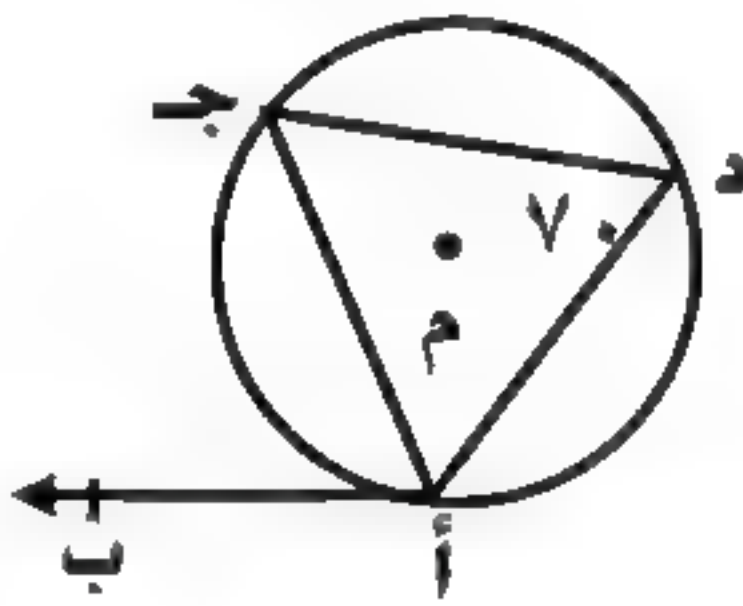
3 في الشكل المقابل : أ ب مماس للدائرة

ق (ب ج) = ثلث قياس الدائرة فإن ق (أ ب ج) =°

- (أ) 60 (ب) 90 (ج) 120 (د) 30

4 قياس القوس المقابل لزاوية مماسية قياسها 60 يساوي°

- (أ) 60 (ب) 30 (ج) 120 (د) 90



5 في الشكل المقابل : أ ب مماس للدائرة م عند ب

ق (ج د أ) = 70° فإن ق (ج أ ب) =°

- (أ) 140 (ب) 35 (ج) 70 (د) 110

1 في الشكل المقابل:

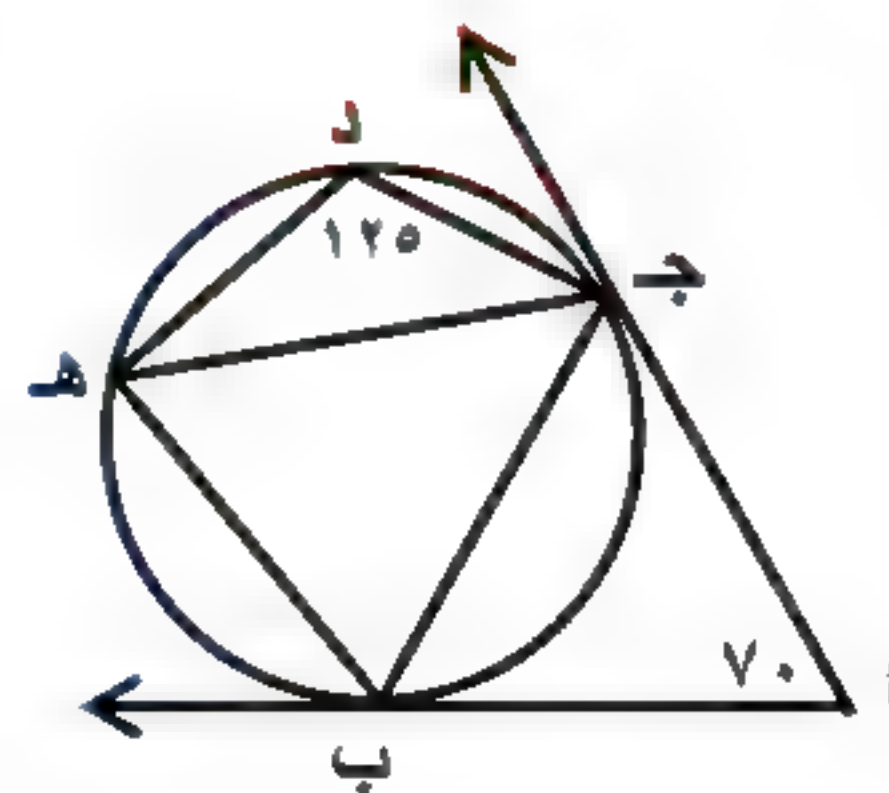
أ ب ، أ ج مماسان للدائرة

ق (أ) = 70°

ق (ج د هـ) = 125°

اثبت أن : 1- ج ب = ج هـ

2- أ ج // ب هـ



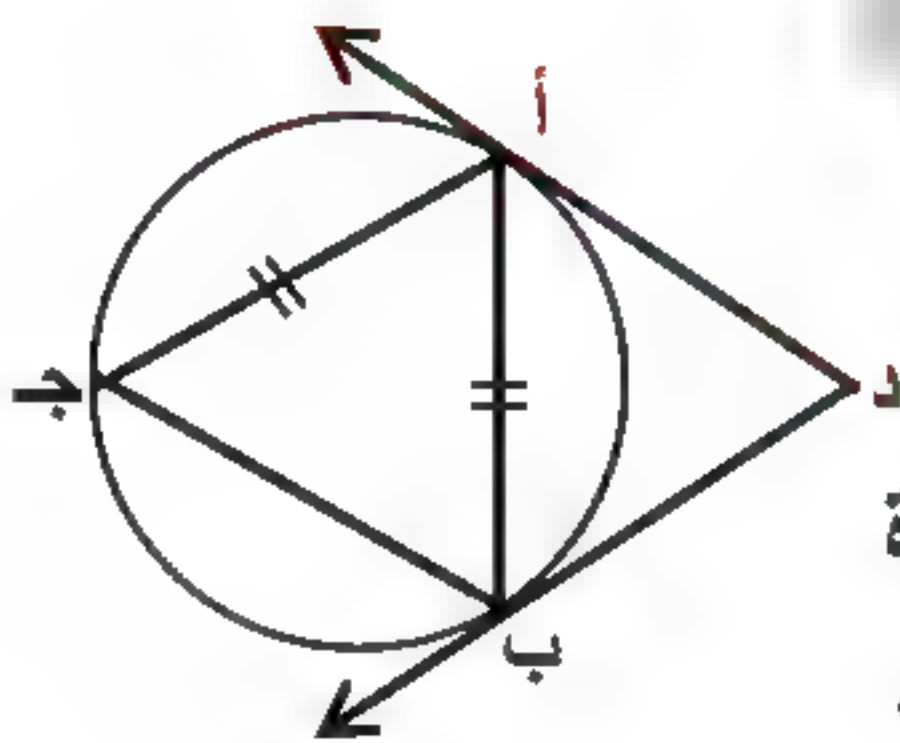
2 في الشكل المقابل:

د أ ، د ب مماسين

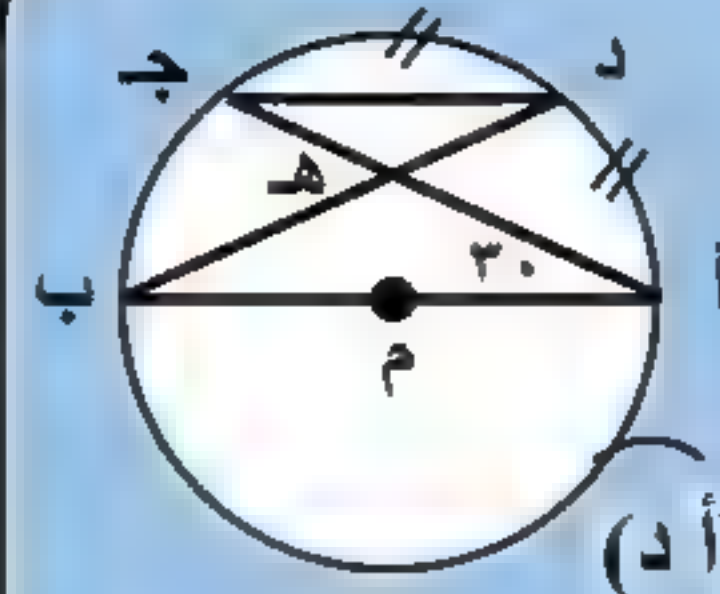
أ ب = أ ج

اثبت أن : أ ج مماس للدائرة

المارة برؤوس المثلث أ ب د



١ في الشكل المقابل:



أ ب قطر في الدائرة م
ق (ج أ ب) = 30°
د منتصف أ ج

- ١- أوجد ق (ب د ج) ، ق (أ د)
- ٢- اثبت أن : أ ب // ج د

الحل

$$\therefore \text{ق (ب د ج)} = \text{ق (ج أ ب)}$$

محيطيتان مشتركتان في ج ب

$$\therefore \text{ق (ب د ج)} = 30^\circ \text{ أولاً}$$

$$\therefore \text{ق (ج ب)} = 30^\circ \times 2 = 60^\circ$$

$$\therefore \text{ق (أ د ج)} + \text{ق (ج ب)} = 180^\circ$$

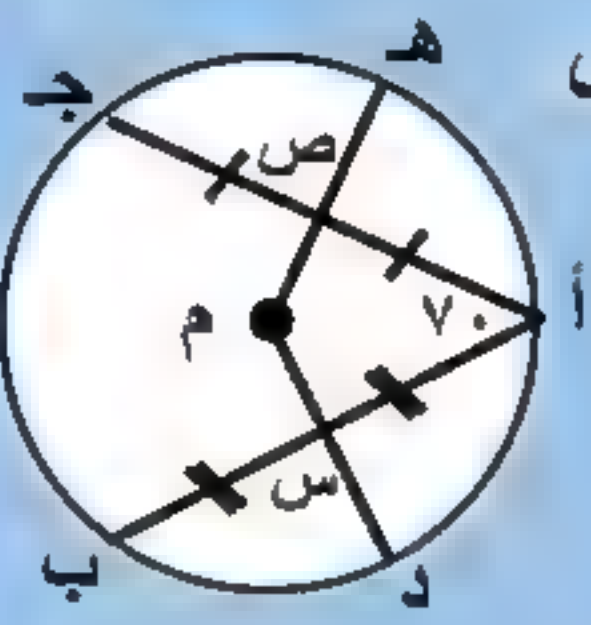
$$\therefore \text{ق (أ د ج)} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\therefore \text{ق (أ د)} = \text{ق (د ج)} \therefore \text{ق (أ د)} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\therefore \text{ق (د ب أ)} = \text{المحيطية} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\therefore \text{ق (ب د ج)} = \text{ق (د ب أ)} \text{ وهما متبادلتان } \therefore \text{أ ب} // \text{ج د}$$

٢ في الشكل المقابل:



أ ب ، أ ج وتران متساويان في الطول
س منتصف أ ب ، ص منتصف أ ج
ق (ج أ ب) = 70°

$$١- \text{أوجد ق (د م ه)}$$

$$٢- \text{اثبت أن س د} = \text{ص ه}$$

الحل

$$\therefore \text{س منتصف أ ب} \therefore \text{م س} \perp \text{أ ب}$$

$$\therefore \text{ق (م س أ)} = 90^\circ$$

$$\therefore \text{ص منتصف أ ج} \therefore \text{م ص} \perp \text{أ ج}$$

$$\therefore \text{ق (م ص أ)} = 90^\circ$$

$$\therefore \text{مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي أ س م ص} = 360^\circ$$

$$\therefore \text{ق (د م ه)} = 360^\circ - (70^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 110^\circ$$

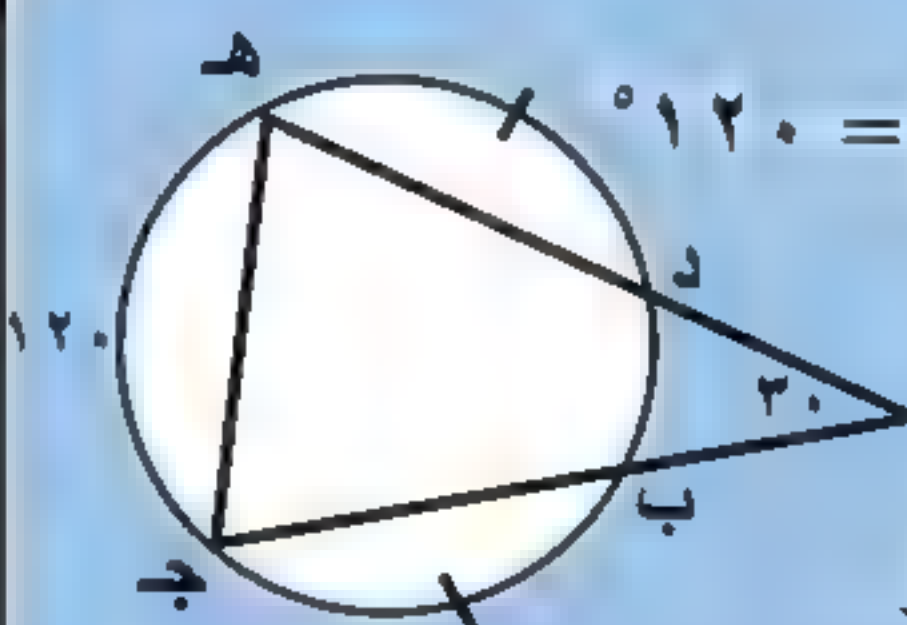
$$\therefore \text{أ ج} = \text{أ ب} \text{ (أوتار متساوية)}$$

$$\therefore \text{م ص} = \text{م س} \text{ (أبعاد متساوية)}$$

$$\therefore \text{م ه} = \text{م د} \text{ (أنصاف أقطار)}$$

ب طرح ١ من ٢ ينتج: ص ه = س د المطلوب الثاني

٣ في الشكل المقابل:



ق (أ) = 30° ، ق (ه ج) = 120°
ق (ب ج) = ق (د ه)

$$١- \text{أوجد: ق (ب د) الأصغر}$$

$$٢- \text{اثبت أن: أ ب} = \text{أ د}$$

الحل

من تمرين مشهور ٢ :

$$\text{ق (ب د)} = \text{ق (ه ج)} - 2 \text{ ق (أ)} = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \text{ق (د ه)} = \text{ق (ب ج)} \text{ بإضافة د ب للطرفين}$$

$$\therefore \text{ق (ب د ه)} = \text{ق (د ب ج)}$$

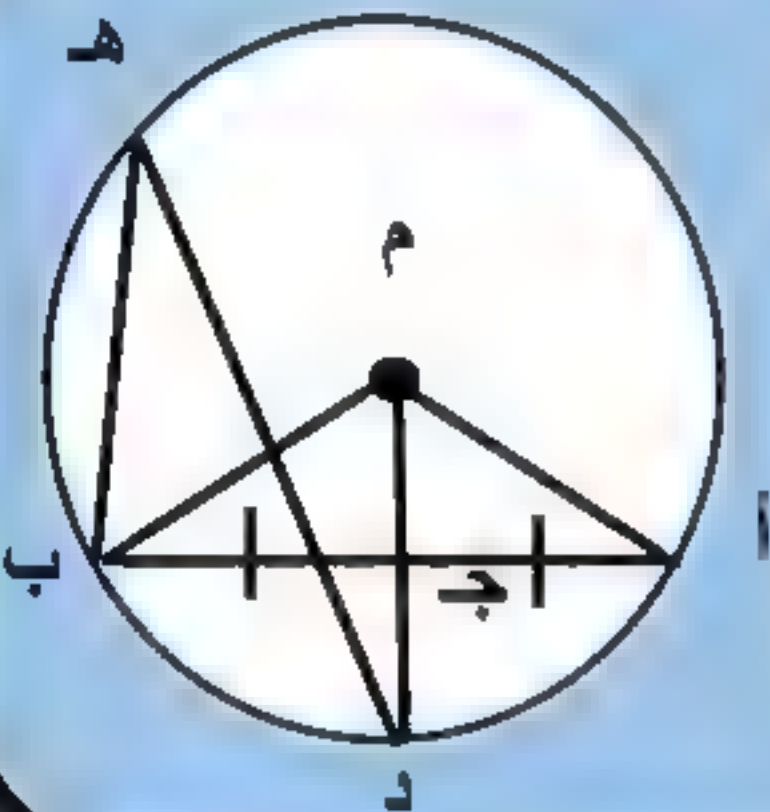
$$\therefore \text{ق (ج ه)} = \text{المحيطية} = \text{ق (ه د)} \text{ المحيطية}$$

$$\therefore \text{أ ج} = \text{أ ه}$$

$$\therefore \text{ق (د ه)} = \text{ق (ب ج)} \therefore \text{د ه} = \text{ب ج}$$

ب طرح ٢ من ١ ينتج أن: أ ب = أ د

٤ في الشكل المقابل:



ج منتصف أ ب

$$\text{ق (م أ ب)} = 20^\circ$$

$$\text{أوجد: ق (ب ه د) ، ق (أ د ب)}$$

الحل

$$\therefore \text{م أ} = \text{م ب} \text{ أنصاف أقطار}$$

$$\therefore \triangle \text{ م أ ب متساوي الساقين} \therefore \text{ق (م ب أ)} = 20^\circ$$

$$\therefore \text{ج منتصف أ ب} \therefore \text{م ج} \perp \text{أ ب} \therefore \text{ق (م ج ب)} = 90^\circ$$

$$\text{في } \triangle \text{ م ج ب: ق (ج م ب)} = 180^\circ - (20^\circ + 90^\circ) = 70^\circ$$

$$\therefore \text{ق (ب ه د)} = \frac{1}{2} \text{ ق (د م ب)}$$

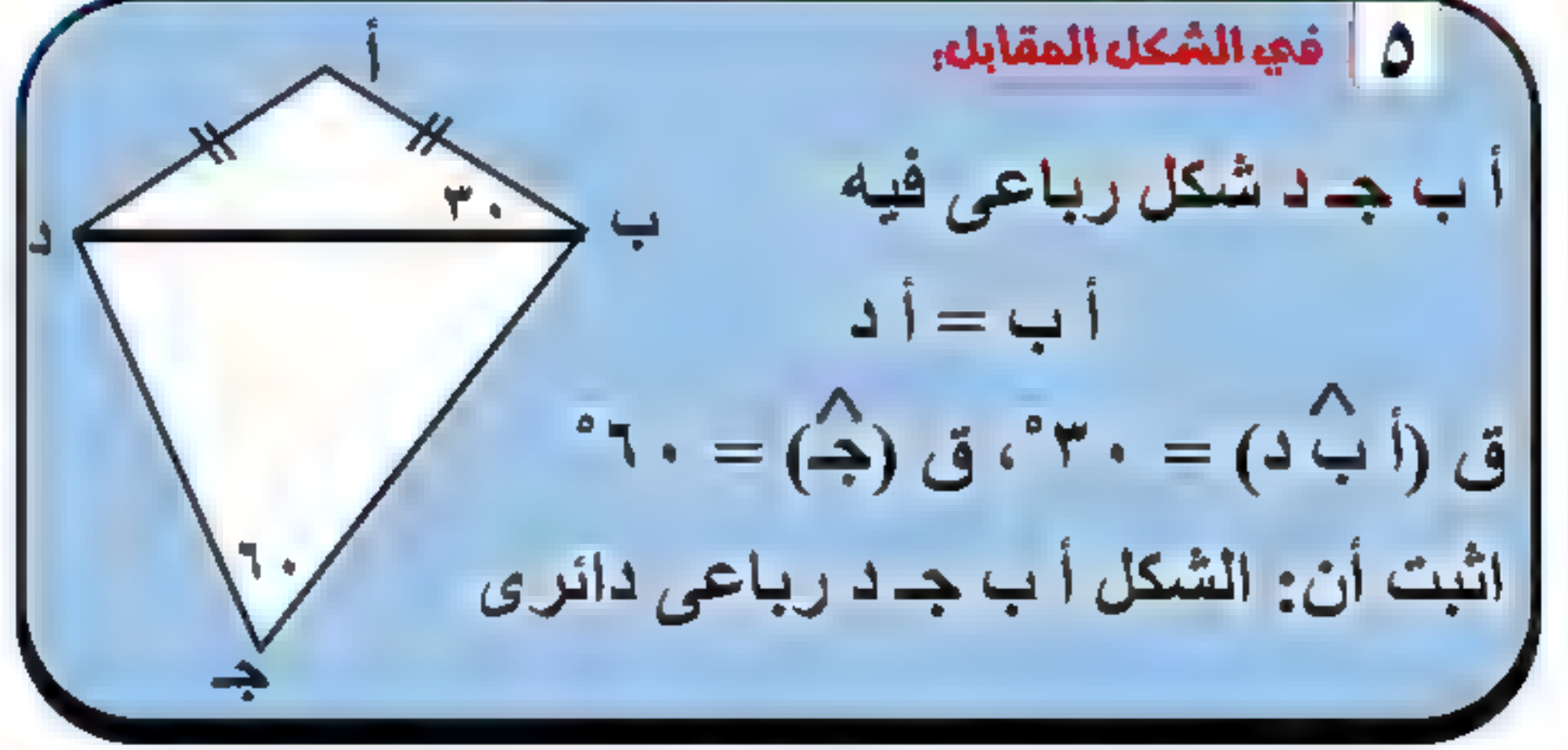
محيطية ومركزية مشتركتان في أ ب

$$\therefore \text{ق (ب ه د)} = 35^\circ \text{ المطلوب الأول}$$

$$\text{في } \triangle \text{ أ م ب: ق (أ م ب)} = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ$$

$$\therefore \text{ق (أ د ب)} = \text{ق (أ م ب)} = \text{المركزية} = 140^\circ$$

٥ في الشكل المقابل:



أ ب ج د شكل رباعي فيه

$$\widehat{AB} = \widehat{AD}$$

$$\widehat{C} (\widehat{A} \widehat{B} \widehat{D}) = 30^\circ, \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{D} \widehat{B}) = 60^\circ$$

اثبت أن: الشكل أ ب ج د رباعي دائري

الحل

$$\because \widehat{AB} = \widehat{AD} \therefore \Delta \text{ أ ب د متساوي الساقين}$$

$$\therefore \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{D} \widehat{B}) = 30^\circ$$

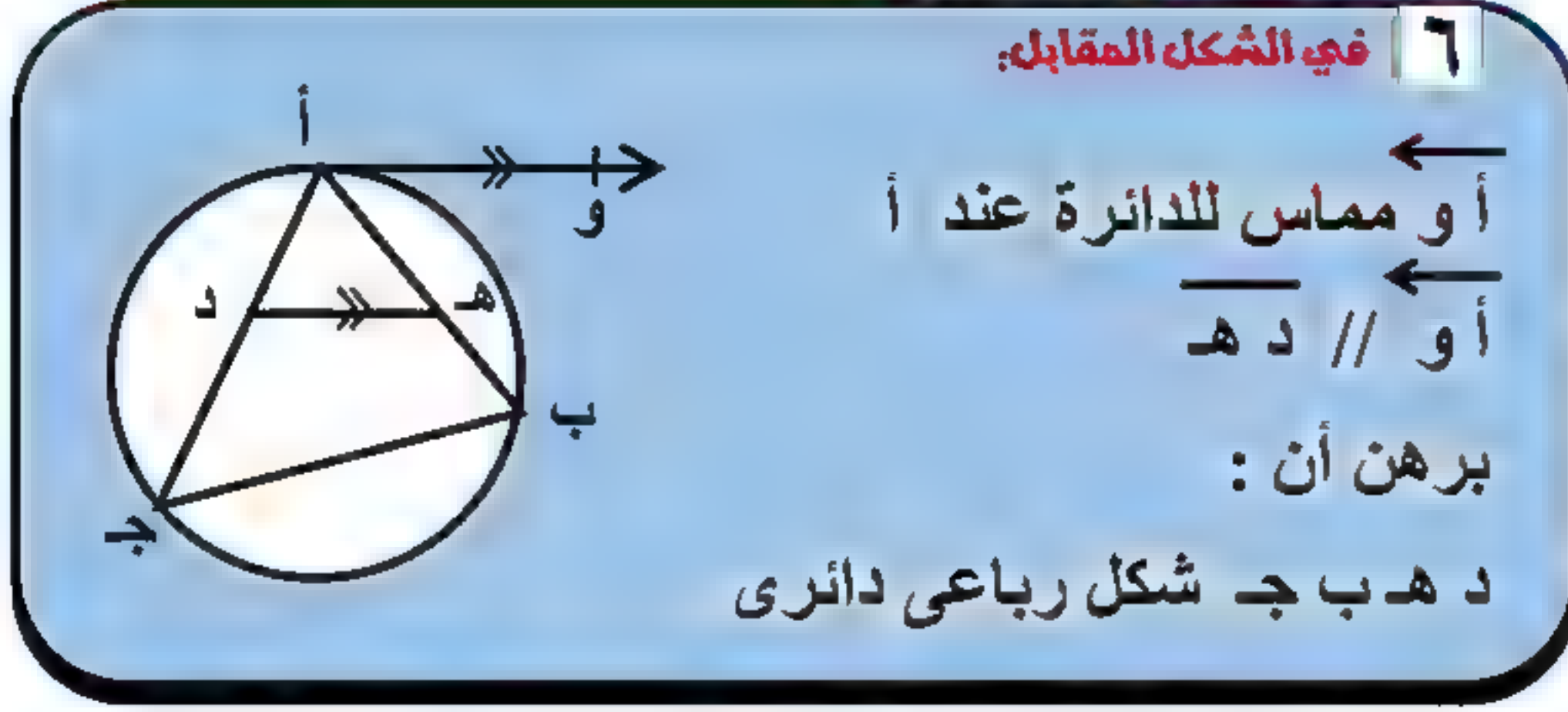
$$\therefore \widehat{C} (\widehat{A}) = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$

$$\therefore \widehat{C} (\widehat{A}) + \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{D} \widehat{B}) = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

وهما زاويتان متقابلتان متكاملتان

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

٦ في الشكل المقابل:



أ و مماس للدائرة عند أ

$$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$$

برهن أن:

د ه ب ج شكل رباعي دائري

الحل

$$\because \overline{DE} \parallel \overline{AB}$$

$$\therefore \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{B}) = \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{D}) \text{ بالتبادل } (1)$$

$$\therefore \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{B}) \text{ المماسية} = \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{D}) \text{ المحيطية } (2)$$

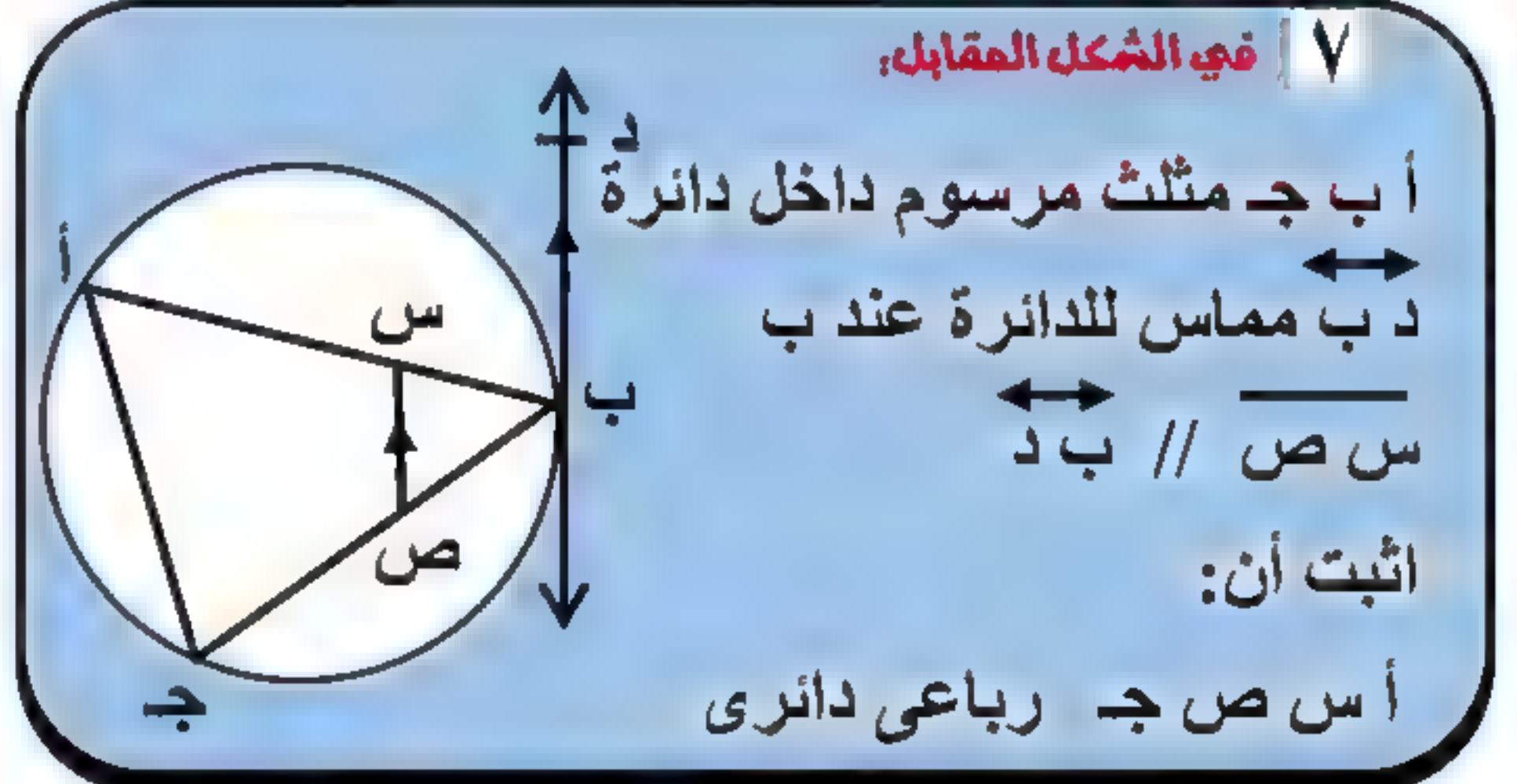
من ١ ، ٢ ينتج أن:

$$\widehat{C} (\widehat{A} \widehat{D}) = \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{B})$$

ونلاحظ أن أ ه د زاوية خارجة ، ج ه هي المقابلة للمجاورة

∴ الشكل د ه ب ج رباعي دائري

٧ في الشكل المقابل:



أ ب ج مثلث مرسوم داخل دائرة

د ب مماس للدائرة عند ب

$$\overline{CS} \parallel \overline{BD}$$

اثبت أن:

أ س ص ج رباعي دائري

الحل

$$\because \overline{CS} \parallel \overline{BD}$$

$$\therefore \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{B} \widehat{D}) = \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{S} \widehat{B}) \text{ بالتبادل } (1)$$

$$\therefore \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{B} \widehat{D}) \text{ المماسية} = \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{S} \widehat{B}) \text{ المحيطية } (2)$$

من ١ ، ٢ ينتج أن:

$$\widehat{C} (\widehat{A} \widehat{S} \widehat{B}) = \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{B} \widehat{D})$$

أي أن: قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

∴ الشكل أ س ص ج رباعي دائري

الحل

$$\therefore \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{B}) = \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{D})$$

$$\therefore \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{B}) = \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{D}) \text{ بالتبادل } (1)$$

$$\therefore \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{B}) \text{ المحيطية} = \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{D}) \text{ المماسية } (2)$$

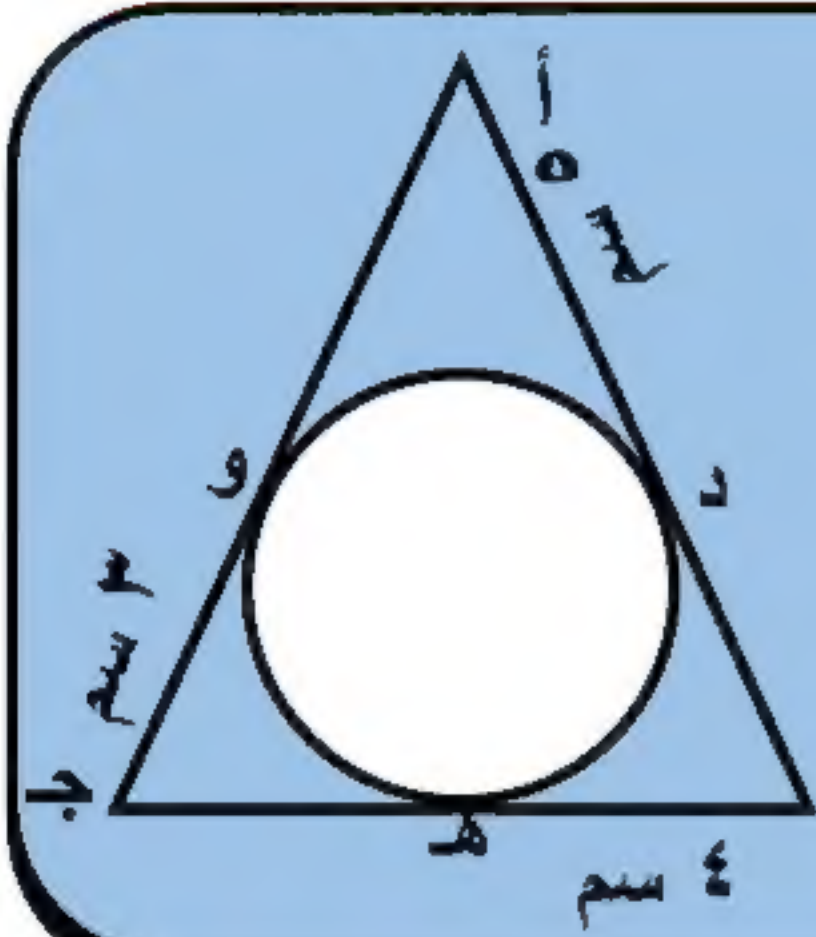
من ١ ، ٢ ينتج أن:

$$\widehat{C} (\widehat{A} \widehat{D}) = \widehat{C} (\widehat{A} \widehat{B})$$

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهي ج د

وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

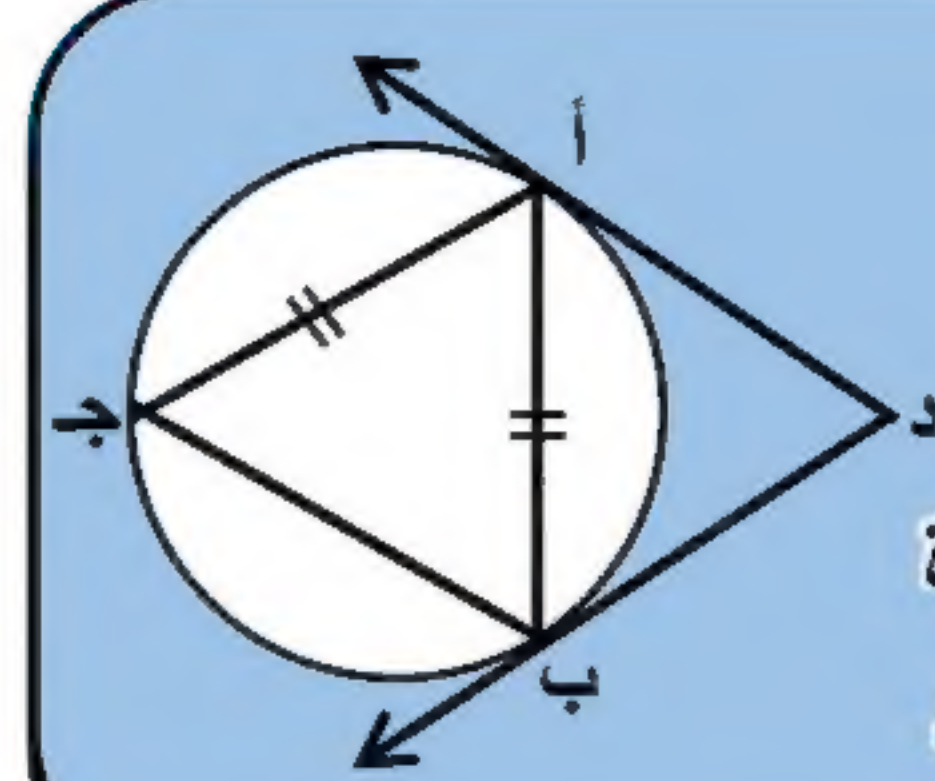


١٠ في الشكل المقابل:

Δ أ ب ج مرسوم خارج الدائرة م
وتمس أضلاعه أ ب ، أ ج ، ب ج
في د ، هـ ، و على الترتيب
أد = ٥ سم ، ب هـ = ٤ سم ، ج و = ٣ سم
أوجد محيط Δ أ ب ج

الحل

\therefore أ د ، أ و قطعتان مماستان \therefore أ د = أ و = ٥ سم
 \therefore ب د ، ب هـ قطعتان مماستان \therefore ب د = ب هـ = ٤ سم
 \therefore ج هـ ، ج و قطعتان مماستان \therefore ج هـ = ج و = ٣ سم
 \therefore أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، أ ج = ٥ + ٣ = ٨ سم
ب ج = ٤ + ٣ = ٧ سم
 \therefore محيط Δ أ ب ج = ٩ + ٨ + ٧ = ٢٤ سم

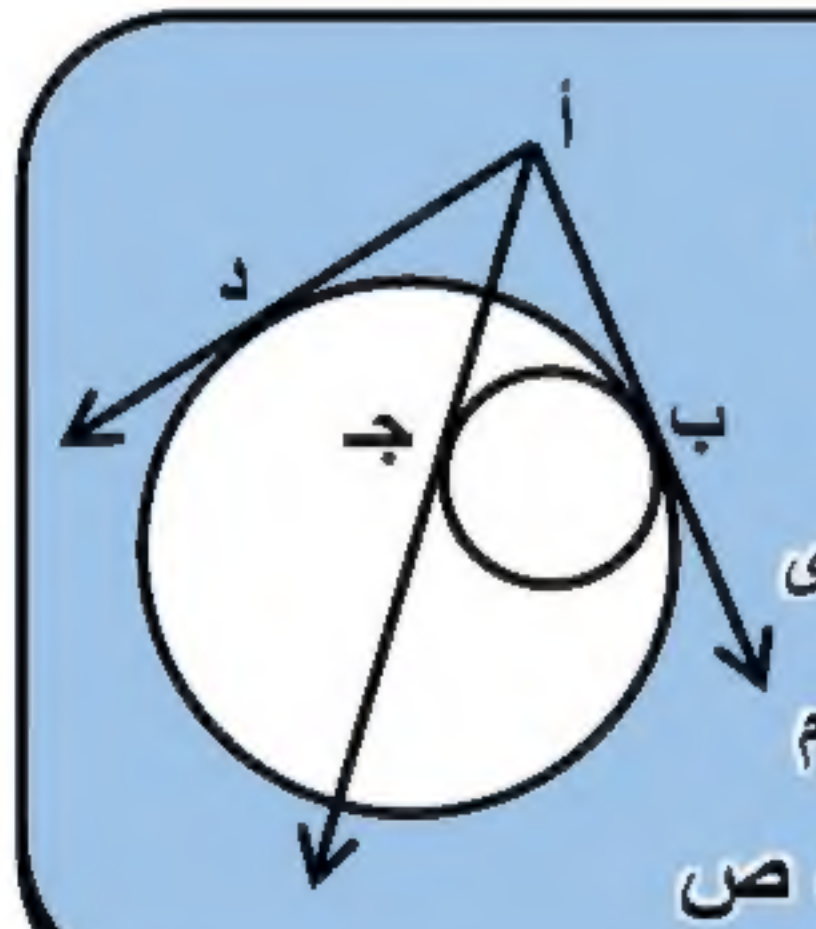


٩ في الشكل المقابل:

د أ ، د ب مماسين
أ ب = أ ج
اثبت أن : أ ج مماس للدائرة
المارة برؤوس المثلث أ ب د

الحل

في Δ أ ب ج : \therefore أ ب = أ ج
١ \therefore ق (أ ب ج) = ق (أ ج ب)
في Δ أ ب د : \therefore د أ = د ب لأنهما قطعتان مماستان
٢ \therefore ق (د أ ب) = ق (د ب أ)
٣ \therefore ق (د أ ب) المماسية = ق (أ ج ب) المحيطة
من ١ ، ٢ ، ٣ وبمقارنة المثلثين ينتج أن :
ق (ب أ ج) = ق (د ب ج)
 \therefore أ ج مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب د

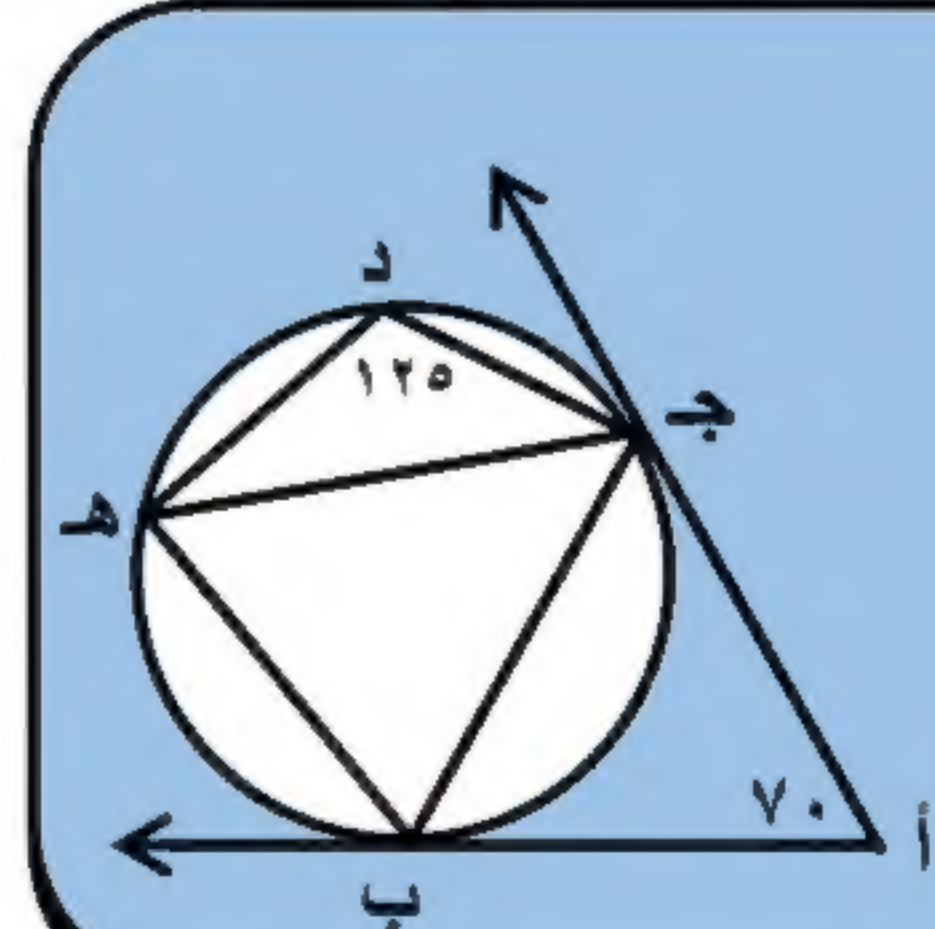


١٢ في الشكل المقابل:

دائرتان متماستان من الداخل في ب
أ ب مماس مشترك للدائرتين
أ ج مماس للصغرى ، أ ب مماس للكبرى
أ ج = ١٥ سم ، أ ب = (٣ - ٢) سم
أ د = (٢ - ص) سم أوجد قيمة ص

الحل

\therefore أ ب = أ ج قطعتان مماستان للدائرة الصغرى
 \therefore أ ب = ١٥ سم \therefore ١٥ = ٣ - ٢ \therefore ١٨ = ٢ سم
 \therefore ٩ = ص
 \therefore أ ب = أ د قطعتان مماستان للدائرة الكبرى
 \therefore أ د = ١٥ سم \therefore ١٥ = ٢ - ص
 \therefore ١٧ = ص



١١ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ ج مماسان للدائرة
ق (أ) = ٧٠°
ق (ج د هـ) = ١٢٥°
اثبت أن : ١ - ج ب = ج هـ
٢ - أ ج // ب هـ

الحل

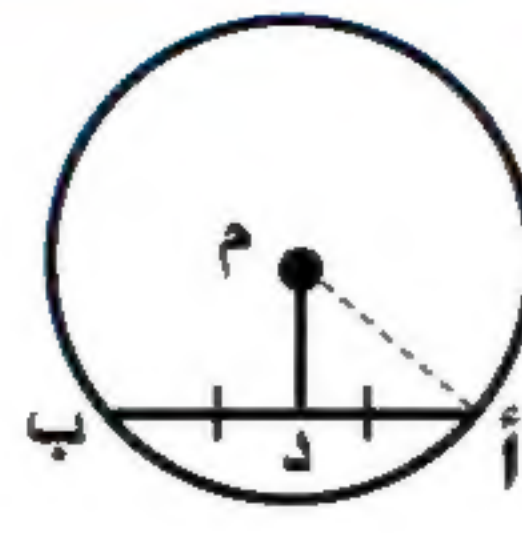
\therefore الشكل د ج ب هـ رباعي دائري
١ \therefore ق (ج ب هـ) = ١٨٠ - ١٢٥ = ٥٥°
 \therefore أ ج ، أ ب قطعتان مماستان
 \therefore ق (أ ج ب) = ق (أ ب ج) = $\frac{٧٠ - ١٨٠}{٢}$ = ٥٥°
٢ \therefore ق (ب هـ ج) المحيطة = ق (أ ج ب) المماسية = ٥٥°
من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (ج ب هـ) = ق (ب هـ ج)
 \therefore Δ ج ب هـ متساوي الساقين \therefore ج ب = ج هـ أولا
 \therefore ق (أ ج ب) = ق (ج ب هـ) = ٥٥°
وهما متبادلتان \therefore أ ج // ب هـ

١



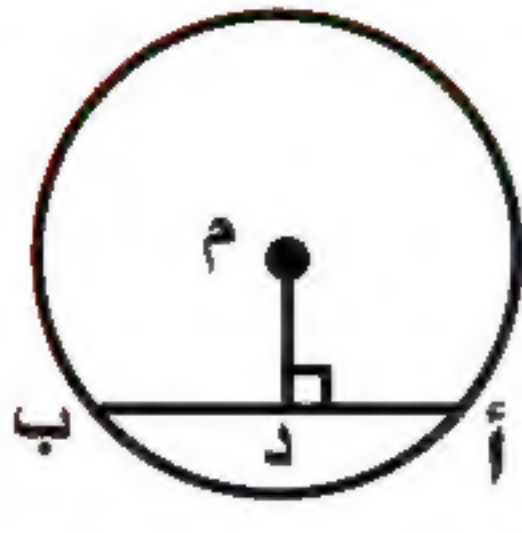
∴ $MA = MB$ (لأنهما أنصاف أقطار)
 ∴ $\triangle MAB$ متساوي الساقين
 أي أن: $\angle A = \angle B$ (ق (ب))

٢



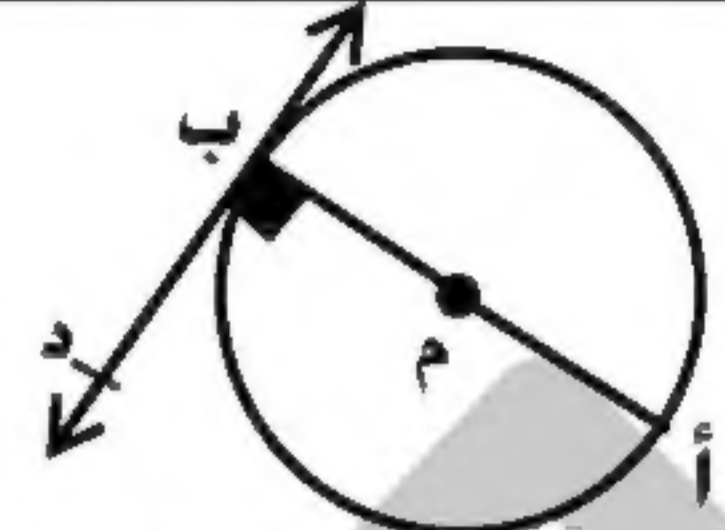
∴ D منتصف الوتر AB
 ∴ $MD \perp AB$
 ∴ $\triangle MAD$ قائم (يمكن تطبيق فيثاغورث)

٣



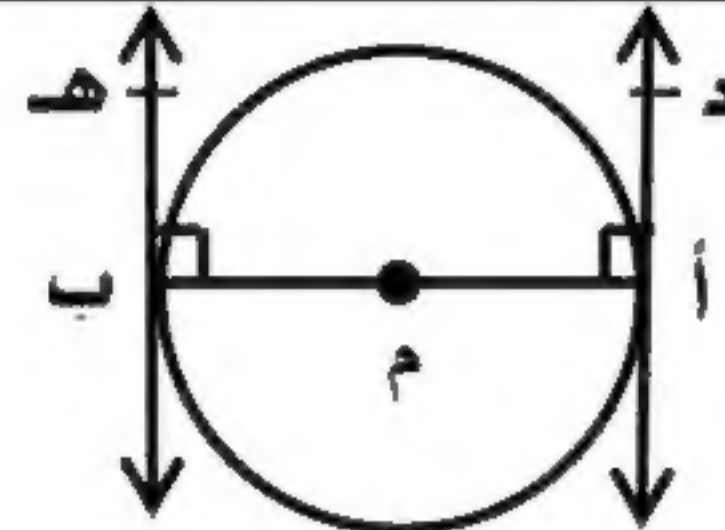
∴ $MD \perp AB$
 ∴ D منتصف AB ∴ $AD = DB$
 فإذا كان $AB = 8$ سم فإن $AD = 4$ سم

٤



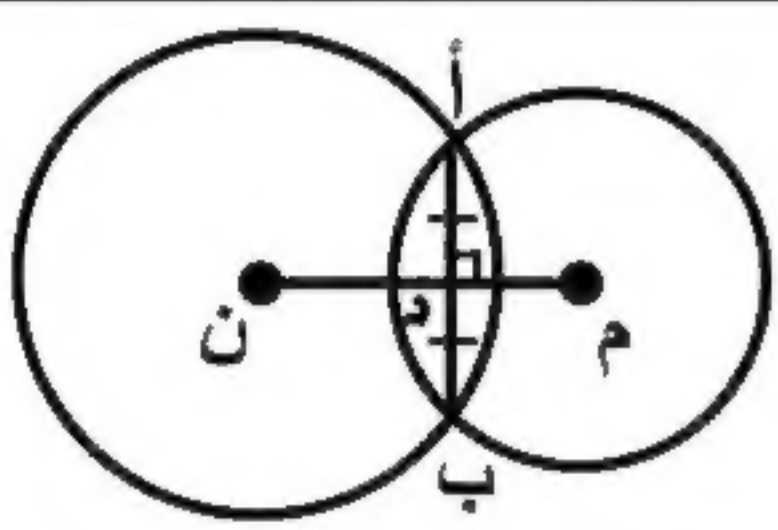
∴ BD مماس ، AB قطر
 ∴ $BD \perp AB$ (المماس \perp القطر)
 والعكس: إذا كانت Q (م B) 90°
 ∴ BD مماس حيث B نقطة التماس

٥



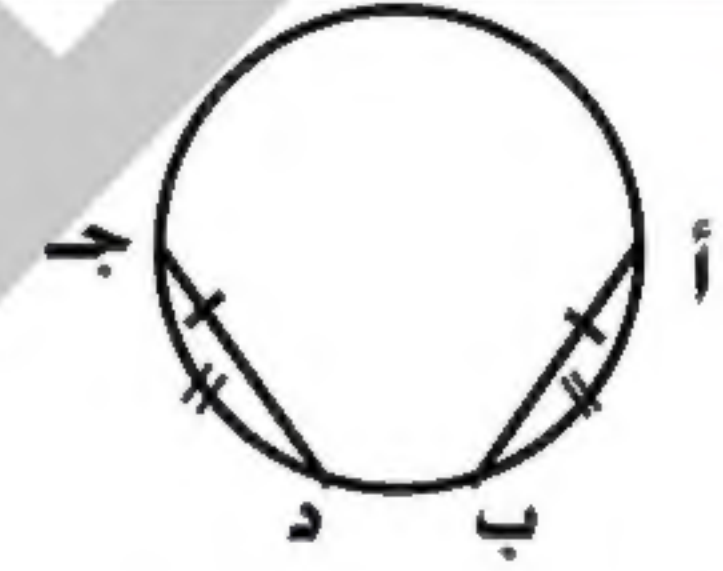
∴ DA ، DB مماسان ، AB قطر
 ∴ $DA \parallel DB$
 ومتساويان لأن المماس \perp نصف القطر

٦



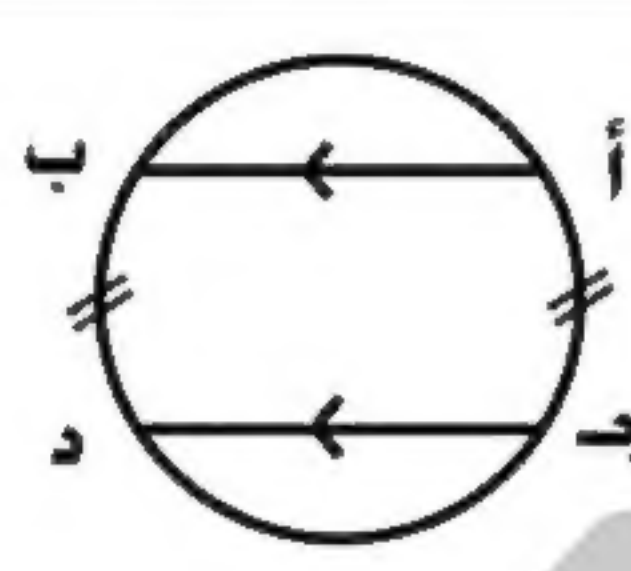
∴ AB وتر مشترك ، M من خط المركزين
 ∴ $MN \perp AB$ ، M من ينصف AB
 خط المركزين هو محور تماثل الوتر المشترك

٧



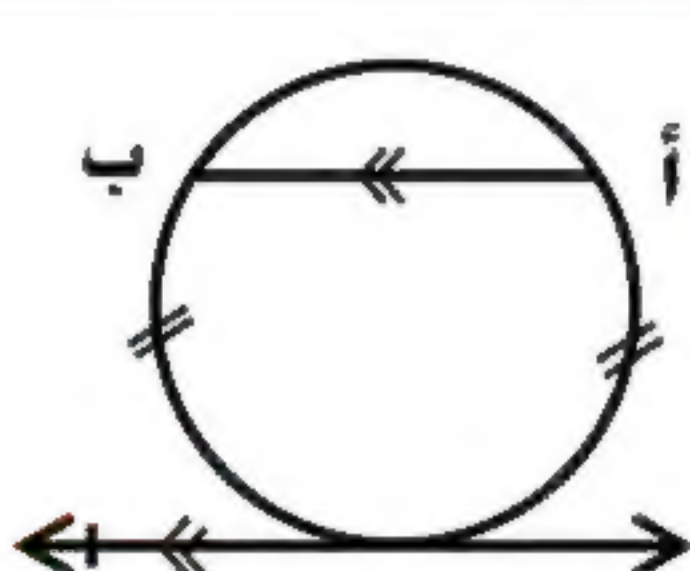
∴ $Q(AB) = Q(CD)$ الأقواس متساوية
 ∴ $AB = CD$ الأوتار متساوية
 والعكس صحيح

٨



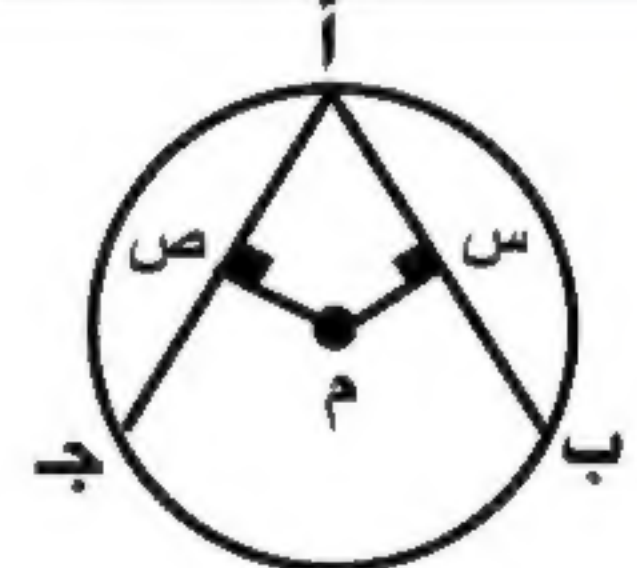
∴ الوتر $AB \parallel$ الوتر CD
 ∴ $Q(AJ) = Q(BD)$

٩



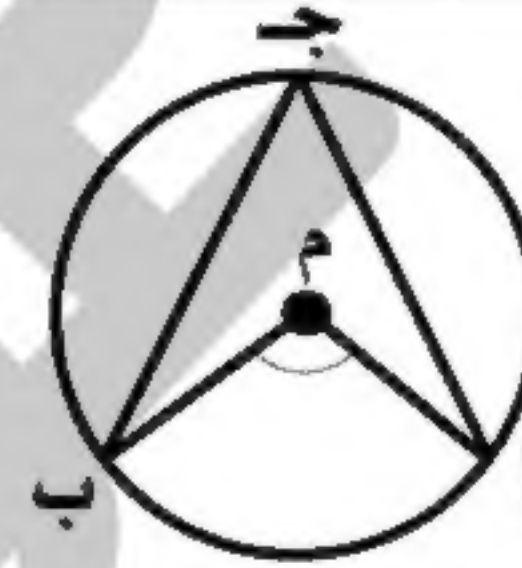
∴ الوتر $AB \parallel$ المماس CD
 ∴ $Q(AJ) = Q(BD)$

١٠



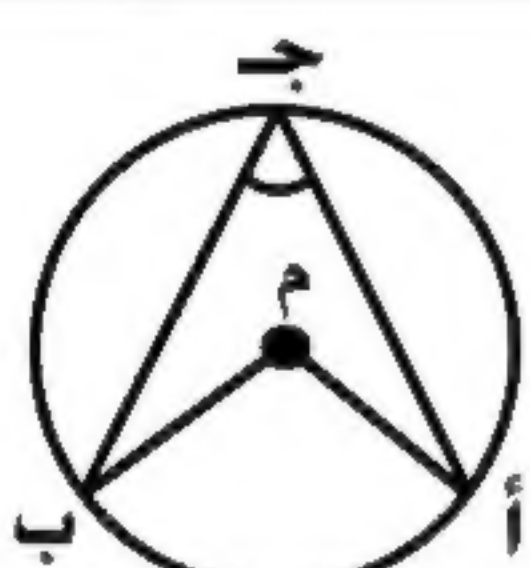
∴ $AB = AJ$ (الأوتار متساوية)
 ∴ $MS = MV$ (الأبعاد متساوية)
 والعكس صحيح

١١



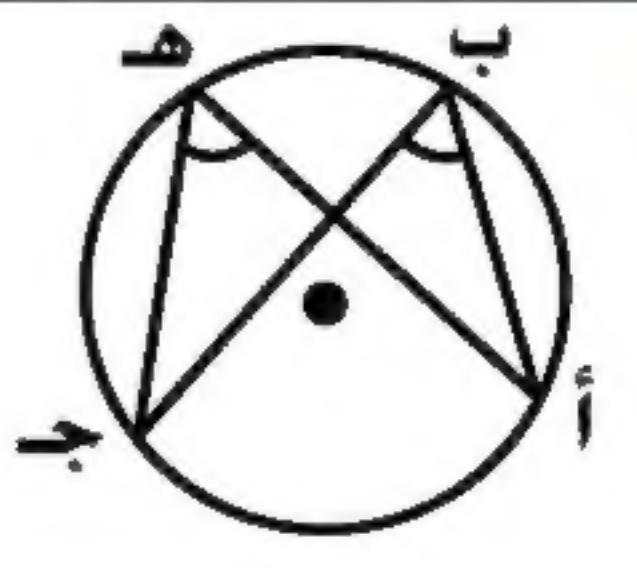
∴ $Q(AB) = Q(AJ)$ المركزية
 ∴ $Q(AB) = 2Q(AJ)$ المحيطة

١٢



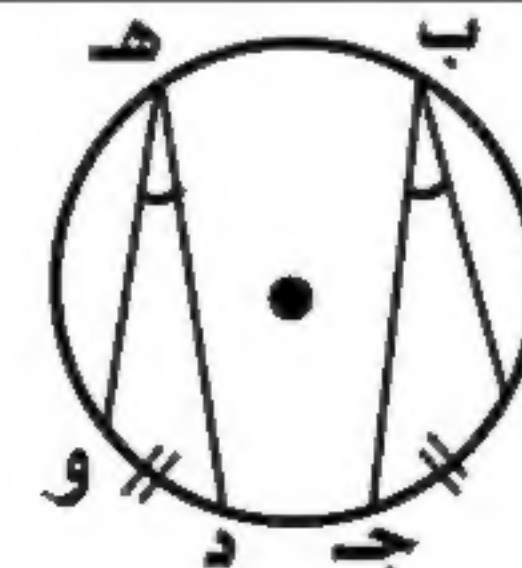
∴ $Q(AJ)$ المحيطة $= \frac{1}{4}Q(AJ)$ المركزية
 ∴ $Q(AJ) = \frac{1}{4}Q(AB)$

١٣



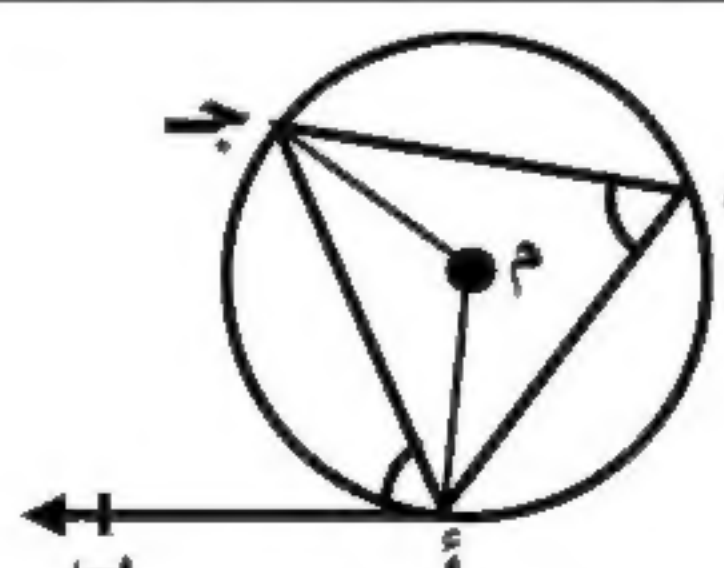
∴ $Q(B) = Q(H)$
 محيطتان مشتركتان في القوس AJ
 كذلك: $Q(A) = Q(J)$

١٤



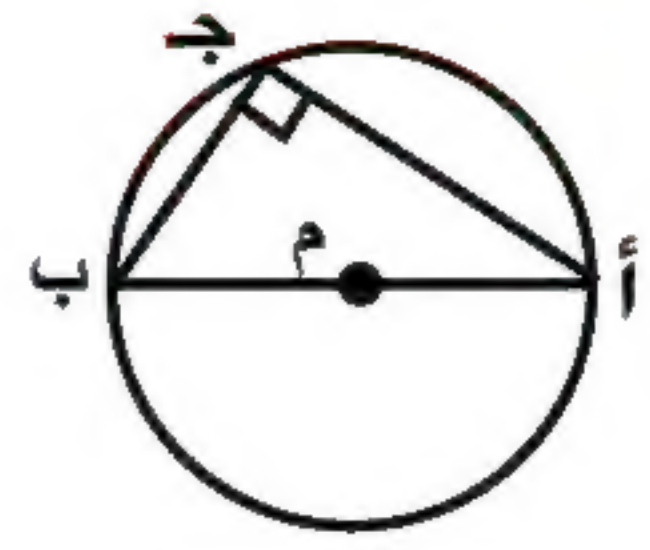
∴ $Q(AJ) = Q(DO)$
 ∴ $Q(B) = Q(H)$
 محيطتان أقواسهم متساوية (والعكس صحيح)

١٥



∴ $Q(AJ)$ المماسية $= Q(D)$ المحيطة
 ∴ $\frac{1}{4}Q(M)$ المركزية
 المركزية ضعف المماسية وضعف المحيطة

١٦

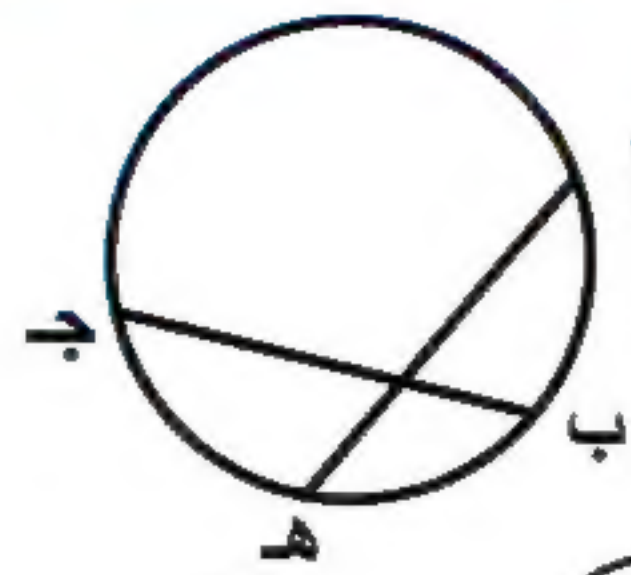


∴ AB قطر

∴ ق (أ ب ج) = ٩٠

محيطية مرسومة في نصف دائرة

١٧

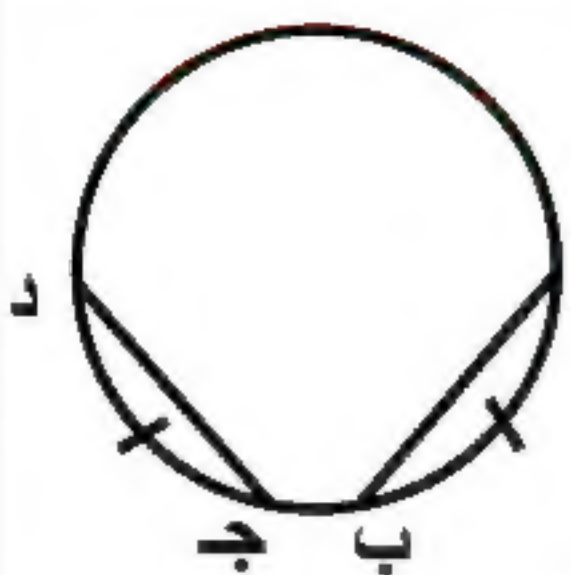


ق (أ ب هـ) = ق (أ ب) + ق (ب هـ)

ق (ب هـ ج) = ق (ج هـ) + ق (هـ ب)

لاحظ أن : القوس ب هـ مشترك بينهما

١٨

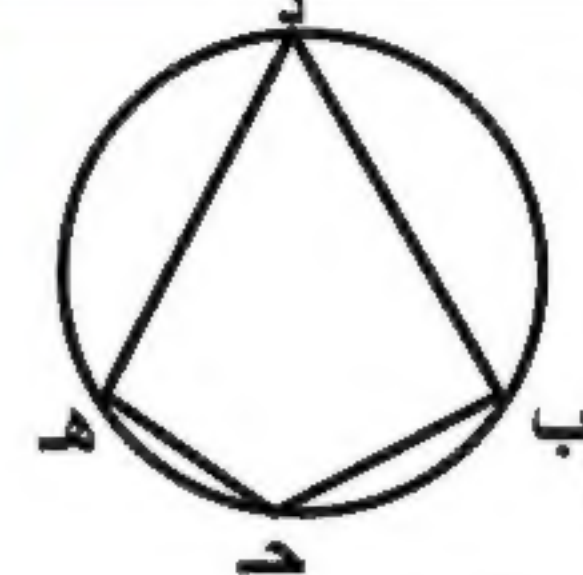
الأقواس المتساوية في الطول
متساوية في القياس
والعكس

∴ طول AB = طول ج د

∴ ق (أ ب) = ق (ج د)

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi \text{ نق}$

١٩

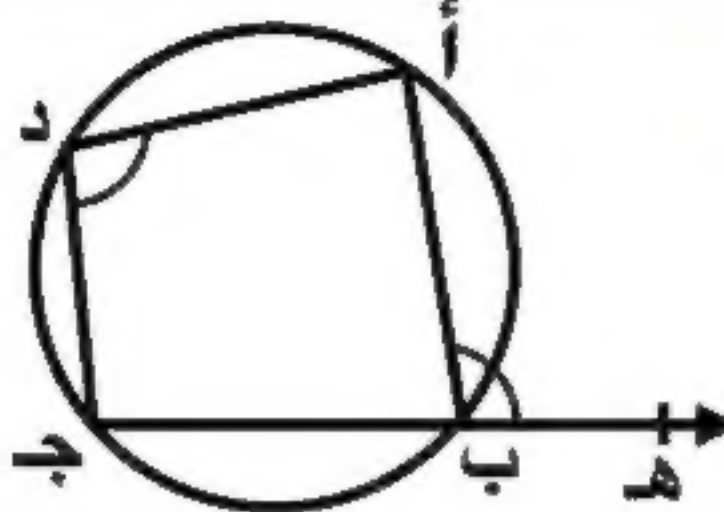
∴ الشكل د ب ج هـ
رباعي دائري

∴ ق (د) + ق (ج) = ١٨٠

ق (أ) + ق (هـ) = ١٨٠

كل زاويتان متقابلتان مجموعهما = ١٨٠

٢٠

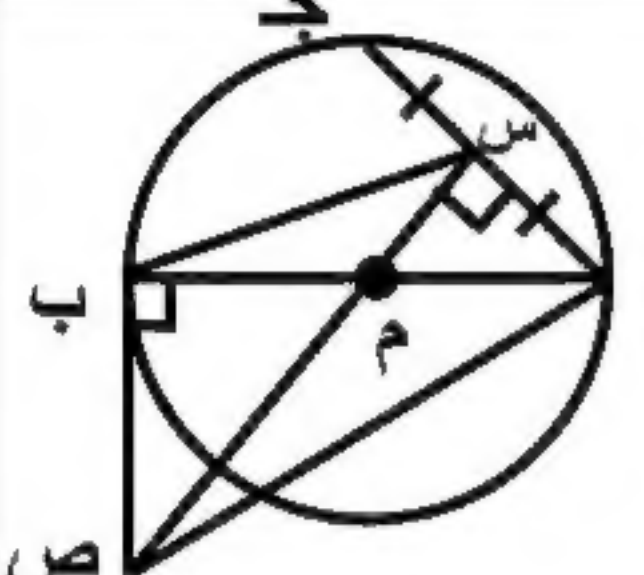


∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

∴ ق (أ ب هـ) الخارجة = ق (د)

الزاوية الخارجة = المقابلة للمجاورة

٢١



∴ ب ص مماس

∴ ق (أ ب ص) = ٩٠

∴ س منتصف أ ج

∴ ق (أ س ص) = ٩٠

∴ ق (أ ب ص) = ق (أ س ص)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة أ ص

∴ الشكل أ س ب ص رباعي دائري

٢٢



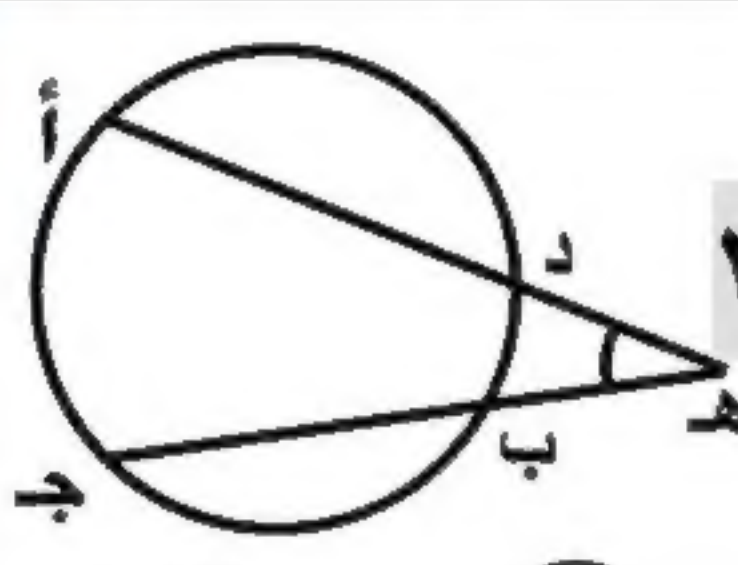
تمرين مشهور ١

ق (د هـ ب) = $\frac{1}{2}$ [ق (أ ج) + ق (د ب)]

ق (أ ج) = ٢ ق (د هـ ب) - ق (د ب)

ق (د ب) = ٢ ق (د هـ ب) - ق (أ ج)

٢٣



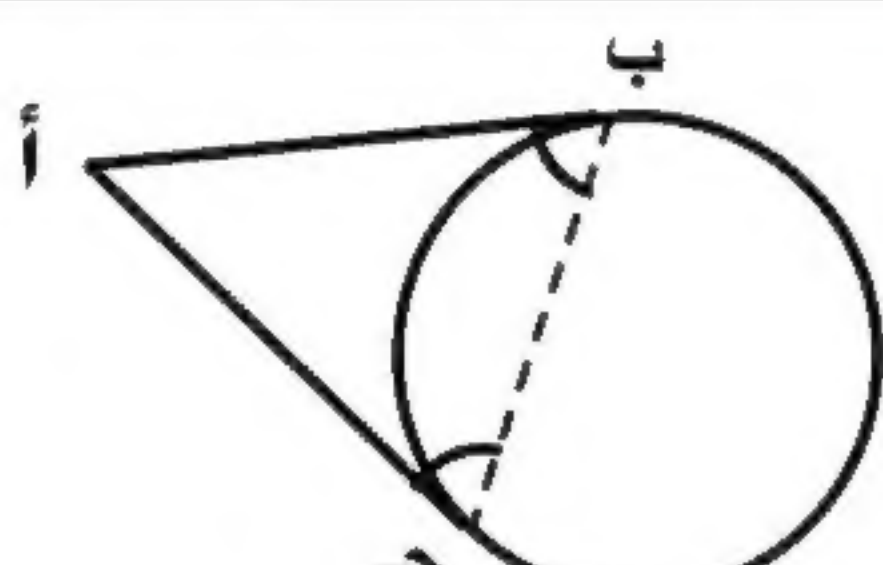
تمرين مشهور ٢

ق (هـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (أ ج) - ق (د ب)]

ق (أ ج) = ٢ ق (هـ) + ق (د ب)

ق (د ب) = ٢ ق (هـ) - ق (أ ج)

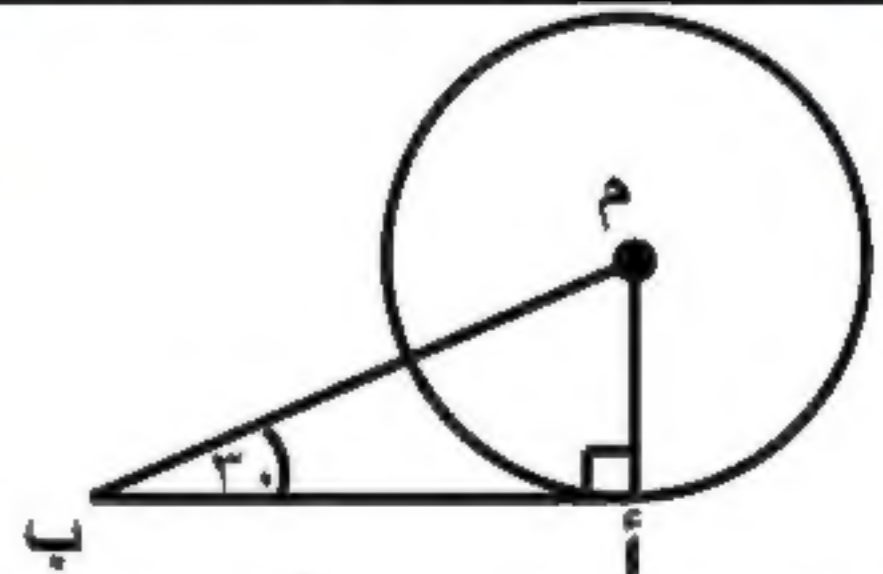
٢٤



∴ أ ب ، أ ج قطعتان مماستان

∴ أ ب = أ ج ، ق (ب) = ق (ج)

٢٥

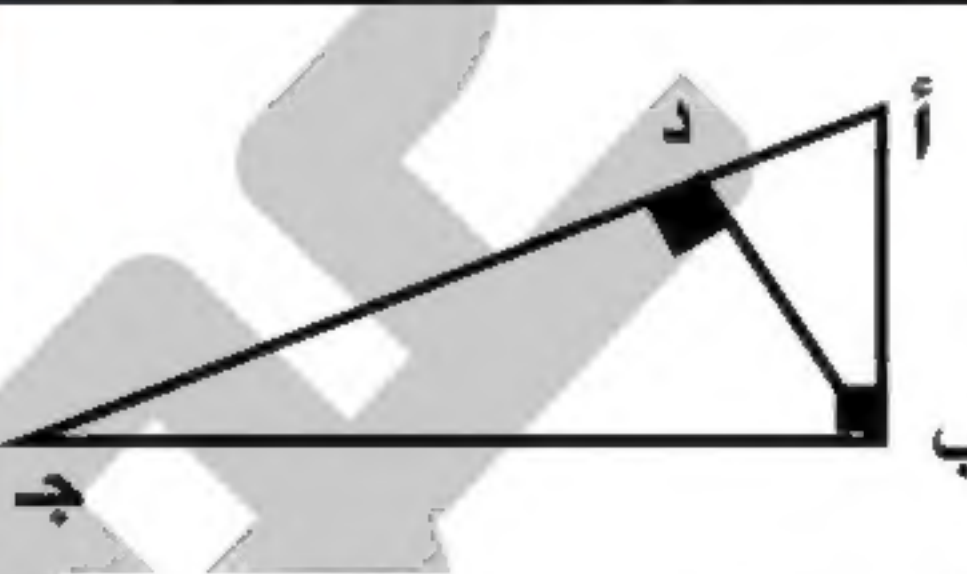


∴ Δ م أ ب قائم ، ق (ب) = ٣٠

∴ م أ = $\frac{1}{2}$ م ب

الضلع المقابل للزاوية ٣٠ = نصف طول الوتر

٢٦



إقليدس

∴ Δ م أ ب قائم ، ب د ⊥ الوتر أ ج

∴ ب د = $\frac{\text{أ ب} \times \text{ب ج}}{\text{أ ج}}$

٢٧

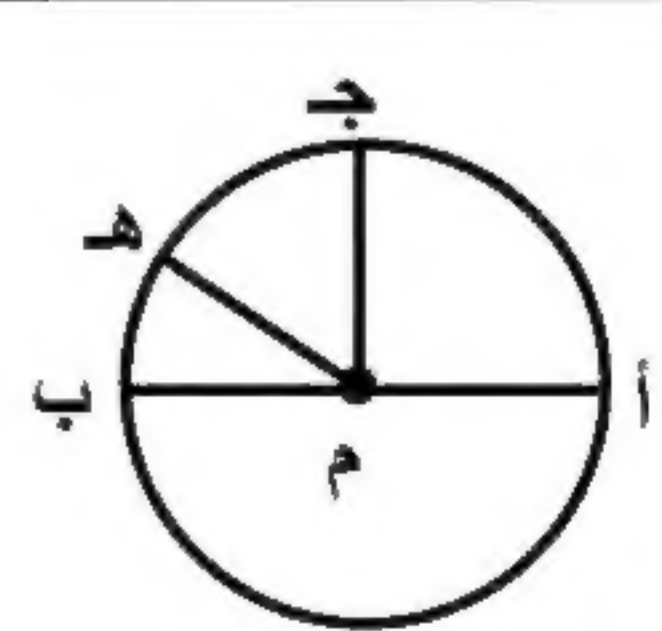
لإثبات أن الشكل رباعي دائري ابحث عن
احدى الحالات الآتية :

١- زاويتان متقابلتان متكاملتان

٢- زاوية خارجة تساوى المقابلة للمجاورة

٣- زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة
وفى جهة واحدة منها ومتساويتان

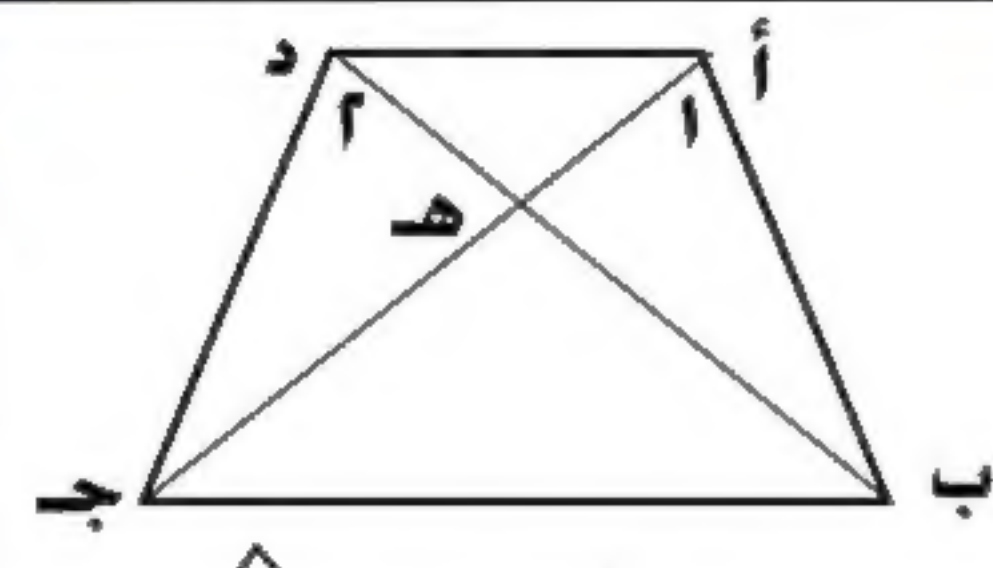
٢٨



∴ أ ب قطر ∴ ق (أ ج ب) = ١٨٠

∴ ق (أ ج) + ق (ج هـ) + ق (هـ ب) = ١٨٠

٢٩

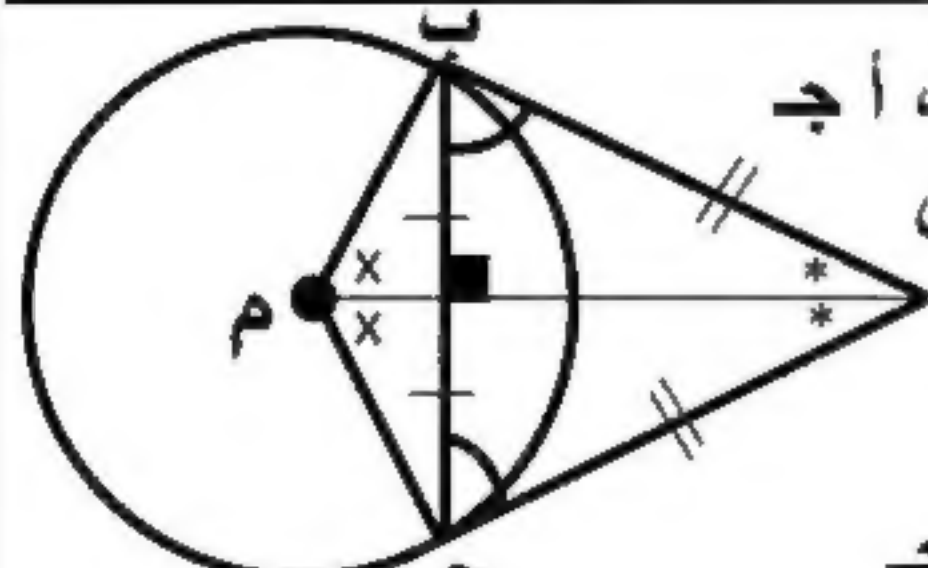


إذا كان ق (١) = ق (٢)

∴ أ ب ج د رباعي دائري

والعكس صحيح

٣٠



∴ أ ب ، أ ج

قطعتان مماستان

فإن :

أ ب = أ ج

ق (أ ب ج) = ق (أ ج ب)

أ م ينصف أ وينصف م

أ م ⊥ ب ج

أ ب م ج رباعي دائري

معلم رياضيات
محمود عوض

- ١ مساحة المعين الذي طولاً قطريه ٦ سم ، ٨ سم = سم
- الحل: مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولاً قطريه = $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ سم
- ٢ مجموع طولى أي ضلعين في المثلث طول الضلع الثالث
- ٣ في المثلث أ ب ج إذا كان $\angle(أ) = 2$ ، $\angle(ب) + \angle(ج) = 2$ فإن زاوية ب تكون
- ٤ في المثلث أ ب ج إذا كان $\angle(أ) < 2$ ، $\angle(ب) + \angle(ج) = 2$ فإن زاوية ب تكون
- ٥ في المثلث أ ب ج إذا كان $\angle(أ) < 2$ ، $\angle(ب) + \angle(ج) = 2$ فإن زاوية ب تكون
- ٦ قياس زاوية الشكل السداسى المنتظم =
- ٧ عدد محاور تماثل المربع = ، عدد محاور تماثل المستطيل =
- ٨ ميل المستقيم الذى معادلته ٣ س - ٤ ص + ١٢ = ٠ هو
- ٩ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات =
- ١٠ عدد محاور تماثل نصف الدائرة عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين
- ١١ القطران المتساويان في الطول وغير متعامدان في
- ١٢ مربع محيطه ٢٠ سم تكون مساحته = سم^٢
- ١٣ إذا كان أ ب قطر فى دائرة م حيث أ (٣ ، -٥) ، ب (٥ ، ١) فإن مركز الدائرة م هو
- ١٤ دائرة محيطها ٨ π فإن طول قطرها =
- ١٥ في المثلث القائم طول المتوسط الخارج من الزاوية القائمة يساوى
- ١٦ في المثلث القائم طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوى
- ١٧ عدد المستطيلات في الشكل المقابل

--	--	--

انتهت المذكرة مع تمنياتي الفاتحة لكم بالنجاح والاستمرار في النجاح